

**INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

THIAGO TORRES DA SILVA

e52221

<https://doi.org/10.63026/acertte.v5i2.221>

**MATEMÁTICA E ARQUITETURA: PARABOLOIDES MODELADOS PELA  
TÉCNICA SLICEFORM**

SÃO PAULO

2024

THIAGO TORRES DA SILVA

**MATEMÁTICA E ARQUITETURA: PARABOLOIDES MODELADOS PELA  
TÉCNICA *SLICEFORM***

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus São Paulo, em cumprimento ao requisito parcial para obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dra. Patricia Andrea Paladino

SÃO PAULO

2024

*Aos meus sobrinhos, Davi Lucas e Alice Zoe.*

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família pelo apoio incondicional durante toda minha vida, em especial durante este curso de Licenciatura em Matemática.

À Profa. Dra. Patricia Andrea Paladino, que me orientou neste Trabalho de Conclusão de Curso, pelo apoio, ajuda e paciência durante o desenvolvimento deste, além do suporte dado durante toda a minha graduação.

Aos professores da graduação, pelos ensinamentos transmitidos e por terem contribuído para meu crescimento intelectual e profissional.

Aos meus colegas de turma pelos momentos de convivência nestes quatro anos de graduação.

*“Sabe o que é mais irado que magia? Matemática”.*

Homem-Aranha: sem volta para casa

## RESUMO

A Matemática está presente em diversas áreas do conhecimento, sendo uma delas as Artes. Pinturas, esculturas e obras arquitetônicas trazem aspectos que se relacionam diretamente com a Matemática, em particular com a Geometria. O objetivo geral deste trabalho é estudar o parabolóide elíptico e o parabolóide hiperbólico e suas modelagens via *Sliceform* no contexto da relação entre Matemática e Arquitetura. Essa pesquisa, com abordagem qualitativa, em termos metodológicos classifica-se como exploratória. Neste sentido, fez-se um levantamento e estudo de literatura relacionada aos conceitos fundamentais dos parabolóides, da relação Matemática e Arquitetura e da técnica *Sliceform*. A etapa seguinte envolveu o desenvolvimento dos modelos, que consistiu na implementação prática da técnica *Sliceform* para construir os modelos tridimensionais das superfícies. A construção dos parabolóides via *Sliceform* levou a uma compreensão mais aprofundada da espacialidade e das seções transversais dessas superfícies, estimulando a criatividade do autor deste trabalho e um interesse ainda maior pelas superfícies matemáticas. Os modelos construídos mostraram potencialidades para serem utilizados em aulas de Matemática.

**Palavras-chave:** Matemática; Arquitetura; Parabolóide elíptico; Parabolóide hiperbólico; *Sliceform*.

## ABSTRACT

Mathematics is present in various areas of knowledge, one of which is the Arts. Paintings, sculptures and architectural works have aspects that relate directly to Mathematics, particularly Geometry. This work is part of a larger, interdisciplinary project that combines aspects of Mathematics and Architecture. The general aim of this work is to study the elliptical paraboloid and the hyperbolic paraboloid and their modeling via Sliceform in the context of the relationship between Mathematics and Architecture. This research, with a qualitative approach, is methodologically classified as exploratory. In this sense, we surveyed and studied the literature related to the fundamental concepts of paraboloids, the relationship between mathematics and architecture and the Sliceform technique. The next step involved the development of the models, which consisted of the practical implementation of the Sliceform technique to create three-dimensional surfaces models. The construction of the paraboloids via Sliceform led to a deeper understanding of the spatiality and cross-sections of the surfaces, stimulating creativity and an even greater interest in mathematical surfaces. The models constructed showed potential for use in math classes.

**Keywords:** Mathematics; Architecture; Elliptical paraboloid; Hyperbolic paraboloid; Sliceform.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Segmento AB de proporção áurea.....	13
Figura 2 – Retângulo de proporção áurea.....	14
Figura 3 – Fachada do Partenon com o retângulo de ouro.....	14
Figura 4 – Retângulo áureo aplicado na fachada da Catedral de Notre Dame.....	15
Figura 5 – Quadro com livros do arquiteto Vitruvius.....	16
Figura 6 – Exemplos arquitetônicos com formas diferenciadas.....	17
Figura 7 – Superfícies quádricas.....	19
Figura 8 – Parabolóide elíptico.....	20
Figura 9 – Parabolóide de revolução.....	21
Figura 10 – Interseção do parabolóide elíptico com o plano $z = k$ .....	22
Figura 11 – Interseção do parabolóide elíptico com o plano $x = k$ .....	23
Figura 12 – Interseção do parabolóide elíptico com o plano $y = k$ .....	23
Figura 13 – Parabolóide hiperbólico.....	24
Figura 14 – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano $z = 0$ .....	25
Figura 15 – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano $z = k$ para $k > 0$ .....	27
Figura 16 – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano $z = k$ para $k < 0$ .....	27
Figura 17 – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano $x = k$ .....	28
Figura 18 – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano $y = k$ .....	29
Figura 19 – Parabolóides interceptados por planos $z = k$ .....	30
Figura 20 – Curvas de nível.....	31
Figura 21 – Cúpula do Senado Federal.....	32
Figura 22 – Cúpula do Senado – Corte.....	33
Figura 23 – Planetário do Parque Ibirapuera.....	33
Figura 24 – Restaurante <i>Los Manantiales</i> .....	34
Figura 25 – Parte interna do restaurante <i>Los Manantiales</i> .....	34
Figura 26 – Aquário <i>L’Oceanogràfic</i> .....	35
Figura 27 – Catedral de Santa Maria.....	35
Figura 28 – Exemplo de modelagem via <i>Sliceform</i> .....	37
Figura 29 – Interseção entre fatias.....	37
Figura 30 – Exemplos de planos de grades.....	38
Figura 31 – Fatias do cubo.....	38

Figura 32 – Cortes na fatia do cubo.....	39
Figura 33 – Cubo construído via <i>Sliceform</i> .....	40
Figura 34 – Planificação do cubo construído via <i>Sliceform</i> .....	40
Figura 35 – <i>Template</i> das fatias do parabolóide de revolução.....	42
Figura 36 – Modelagem do parabolóide hiperbólico via <i>Sliceform</i> .....	43
Figura 37 – <i>Template</i> das fatias do parabolóide hiperbólico.....	43
Figura 38 – Fatias do parabolóide de revolução em papel colorido.....	44
Figura 39 – Fatias do parabolóide hiperbólico em papel colorido.....	44
Figura 40 – Parabolóide de revolução construído via <i>Sliceform</i> .....	45
Figura 41 – Parabolóide hiperbólico construído via <i>Sliceform</i> .....	46
Figura 42 – Dimensões dos modelos construídos.....	47
Figura 43 – Planos de grade dos modelos construídos.....	48
Figura 44 – Grade elíptica.....	49
Figura 45 – Planificação dos modelos.....	49
Figura 46 – <i>Guanglian icc cloud center</i> .....	51
Figura 47 – <i>Metropol Parasol</i> .....	52
Figura 48 – Escultura da <i>Tonbridge School</i> .....	52

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	12
2. MATEMÁTICA E ARQUITETURA .....	15
3. PARABOLOIDES E APLICAÇÕES NA ARQUITETURA .....	21
3.1. Parabolóide elíptico .....	23
3.2. Parabolóide hiperbólico.....	27
3.3. Curvas de nível dos parabolóides .....	33
3.4. Aplicações dos parabolóides na Arquitetura .....	34
4. A TÉCNICA <i>SLICEFORM</i> .....	39
5. CONSTRUINDO E EXPLORANDO OS MODELOS DE PARABOLOIDES VIA <i>SLICEFORM</i> .....	45
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	57
REFERÊNCIAS .....	59

## 1. INTRODUÇÃO

A Matemática está presente em diversas áreas do conhecimento, sendo uma delas as Artes. Pinturas, esculturas e obras arquitetônicas trazem aspectos que se relacionam diretamente com a Matemática, em particular com a Geometria. No contexto da Matemática, tanto no Cálculo Diferencial e Integral quanto na Geometria Analítica, os alunos do curso de Licenciatura em Matemática estudam as superfícies quádricas. Segundo Stewart (2016), as superfícies quádricas são as correspondentes tridimensionais das cônicas. Thomas, Weir e Hass (2012) destacam que as superfícies quádricas básicas são: elipsoide, hiperboloide de uma folha, hiperboloide de duas folhas, cone elíptico, paraboloides elíptico e paraboloides hiperbólico. Os paraboloides elíptico e hiperbólico, matematicamente, reúnem curvas cônicas interessantes: elipses, parábolas e hipérbolas, não apenas em termos algébricos, como também a imagem dessas curvas nelas mergulhadas. Neste sentido, essas superfícies se mostram objetos geométricos de muito interesse para o estudo e uso na Arquitetura, principalmente devido às suas curvas que possibilitam a criação de continuidade e resistência em conjuntos de obras arquitetônicas.

No final do século XIX, devido à dificuldade dos alunos em visualizar superfícies e curvas explicadas em sala de aula, Felix Klein e Alexander von Brill criaram diversos modelos geométricos com materiais como arame, gesso e papel. Posteriormente, John Sharp desenvolveu diversas superfícies utilizando a mesma técnica empregada anteriormente por Klein e von Brill (MONERA, 2020). Estas formas foram vendidas em todo o mundo para professores de Matemática. Mais tarde, a técnica foi utilizada para construir superfícies de madeira extremamente fortes (LUECKING, 2006).

Segundo Santana e Funato (2014), o *Sliceform* traz a interseção entre a Arte e a Matemática, apresentando-se como uma proposta lúdica para desenvolver a criatividade e colocá-la em prática a partir da construção de modelos de superfícies matemáticas. A técnica utiliza como base as seções transversais de uma superfície. Essas seções são as curvas obtidas através da interseção entre a superfície e uma família de planos paralelos aos planos coordenados. A partir dessas interseções, pode-se utilizar moldes de papel cujo contorno coincida com essas curvas e construir um modelo tridimensional da superfície de interesse (MONERA, 2020).

Por estar inserido em um contexto histórico de estudo e construção de modelos tangíveis de superfícies matemáticas, o *Sliceform* se apresenta como uma proposta de material didático para ser utilizado em aulas de Matemática, de modo que os estudantes melhorem as habilidades

de visualização e representação de objetos geométricos tridimensionais. Pode-se construir modelos de superfícies ou sólidos geométricos, como os estudados na Geometria Espacial, e utilizá-los como material didático nas aulas de Matemática e Arte, proporcionando discussões envolvendo conceitos de Geometria e aspectos artísticos que estejam relacionados aos modelos construídos.

Este trabalho dá continuidade a um projeto de iniciação científica desenvolvido pelo autor em 2022, sob orientação da mesma professora orientadora deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). A pesquisa iniciada na iniciação científica tinha como título “Matemática e Arquitetura: parabolóide hiperbólico modelado pela técnica *Sliceform*”, na qual estudou-se o parabolóide hiperbólico e sua modelagem via *Sliceform*. A iniciação científica forneceu uma base sólida de conhecimentos e resultados sobre a utilização da técnica *Sliceform* para a construção de modelos físicos de superfícies matemáticas. Neste sentido, com a finalidade de continuar explorando o tema pesquisado no projeto de iniciação científica e ampliando a discussão, optou-se por estudar também o parabolóide elíptico e sua modelagem via *Sliceform*.

O objetivo geral deste trabalho é estudar o parabolóide elíptico e o parabolóide hiperbólico e suas modelagens via *Sliceform* no contexto da relação entre Matemática e Arquitetura.

Essa pesquisa, com abordagem qualitativa, em termos metodológicos classifica-se como exploratória. Segundo Gil (2008), estudos exploratórios buscam oferecer uma compreensão inicial e aproximada de um fenômeno específico, especialmente quando há pouca investigação sobre o assunto, dificultando a formulação de hipóteses precisas e mensuráveis. A escolha do tema da pesquisa justifica-se pela escassez de trabalhos em português que abordem o uso do *Sliceform* para a modelagem de superfícies, em especial no contexto da Matemática e da Arquitetura. Sendo assim, a motivação deste trabalho foi contribuir significativamente para estudos futuros, reunindo conhecimentos já consolidados e fornecendo novas perspectivas sobre o *Sliceform* e suas aplicações na modelagem de superfícies matemáticas.

Dessa forma, buscou-se no capítulo 2, intitulado “Matemática e Arquitetura”, discutir as conexões entre a Matemática e a Arquitetura. No capítulo 3, intitulado “Parabolóides e aplicações na Arquitetura”, apresentou-se os principais conceitos sobre o parabolóide elíptico e o parabolóide hiperbólico, fazendo uso do *software* de Geometria dinâmica *GeoGebra* para ilustrar a representação gráfica dessas superfícies e de suas curvas de nível, além de destacar algumas obras arquitetônicas cujas formas foram inspiradas nos parabolóides estudados. O capítulo 4, intitulado “A técnica *Sliceform*”, traz elementos históricos e o funcionamento do *Sliceform*. No capítulo 5, intitulado “Explorando e construindo modelos de parabolóides via

*Sliceform*”, é discutida a construção dos modelos tridimensionais dos paraboloides estudados e explorada as semelhanças entre os modelos construídos e a representação gráfica feita no *GeoGebra*, apontando ainda a utilização do *Sliceform* na Arquitetura. Por fim, o capítulo 6 apresenta as considerações finais do trabalho.

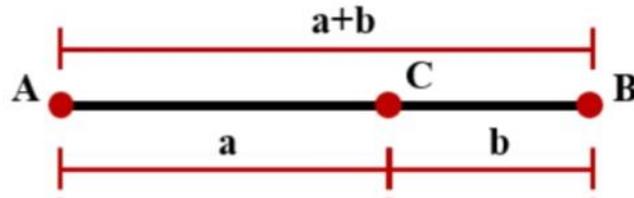
## 2. MATEMÁTICA E ARQUITETURA

Desde a Antiguidade, a Arquitetura tem estado intimamente ligada à Matemática. Através dela, foram estabelecidas relações, teorias e técnicas de representação gráfica que têm servido como suporte para o desenvolvimento da Arquitetura (MARQUES, 2017). No Egito Antigo, Matemática e Arquitetura são duas ciências bem relacionadas. No vale do rio Nilo se desenvolveu uma Matemática bastante prática, aplicada na construção de obras hidráulicas e canais de irrigação. Os babilônicos também desenvolveram a Matemática em diversos aspectos do seu cotidiano, empregando-a em calendários, administração de colheitas, impostos, sistemas de irrigação e drenagem, já que a Mesopotâmia se situava entre os rios Tigre e Eufrates, (BRUSANTIN, 2011). Assim, considerando-se que a Matemática está presente desde a Antiguidade e tem contribuído para o desenvolvimento das ciências e da humanidade, buscaram-se aproximações entre as áreas da Matemática e da Arquitetura, visando perceber novas perspectivas na elaboração do espaço projetado e construído (SANTOS et al., 2018), pois segundo Baumkart, Atkinson e Neis (2019) a Matemática é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio metódico e sistemático do ser humano, instigando a capacidade intuitiva e permitindo a análise geométrica, muito utilizada nas construções.

Os egípcios empregaram uma variedade de princípios matemáticos na construção das grandes pirâmides, focando especialmente em conceitos como razão, proporção e ângulos retos. A utilização de conceitos de triângulos foi fundamental para a construção de monumentos históricos, como as pirâmides, onde o formato triangular e a variação nas medidas das peças foram projetados para absorver as cargas da estrutura, tornando-a autoportante. Este formato foi adotado por diversas civilizações, desde o Oriente até a América, devido à sua eficiência na construção de edifícios altos, onde a base suporta o peso principal. As edificações egípcias aplicaram o triângulo pitagórico e conceitos de trigonometria para calcular as proporções das pirâmides, mesmo que o Teorema de Pitágoras só tenha sido demonstrado tempos depois (BAUMKART; ATKINSON; NEIS, 2019).

Silva (2022) diz que com a descoberta da existência dos números irracionais, surgiu também o conceito de proporção áurea, utilizado pela primeira vez em “Os Elementos” de Euclides (300 a.C). Conforme a Figura 1, para obter o chamado número de ouro deve-se seccionar o segmento AB no ponto C em duas partes não iguais e calcular a razão entre o segmento mais longo AC pelo segmento menor CB, o resultado obtido por esta divisão deve ser o mesmo se calcularmos a razão entre a medida da reta inteira AB pelo segmento mais longo AC, como mostrado na Equação 1.

**Figura 1** – Segmento AB de proporção áurea



Fonte: Silva, 2022.

Em termos algébricos, tem-se que

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow a^2 = b(a+b) \Leftrightarrow a^2 = ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - ab = 0 \quad (1)$$

Sendo  $\varphi = \frac{a}{b}$  a razão áurea e dividindo a Equação 1 por  $b^2$ , tem-se que

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} - \frac{ab}{b^2} = 0 \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 - \frac{a}{b} = 0 \quad (1.3)$$

$$\varphi^2 - 1 - \varphi = 0 \quad (1.4)$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad (1.5)$$

Resolvendo a Equação 1.5, segue que

$$\varphi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \quad (1.6)$$

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (1.7)$$

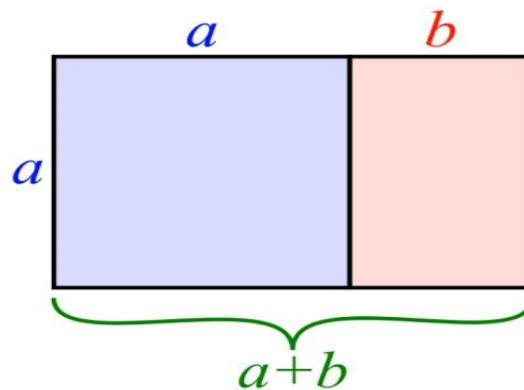
Por se tratar de uma medida de comprimento, note que  $\varphi > 0$ . Logo, segue da Equação 1.7 que

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (1.8)$$

$$\varphi \cong 1,6180 \quad (1.9)$$

Segundo Silva (2022), uma maneira de aplicar as características da proporção áurea é através do retângulo dourado, no qual as medidas seguem a relação entre o comprimento do maior lado e do menor lado, resultando no número áureo, conforme a Figura 2. Os gregos tinham como modelo de beleza o retângulo construído na proporção áurea (BRUSANTIN, 2011). O retângulo de ouro representava para os gregos a máxima expressão da beleza em termos matemáticos, sua forma era considerada harmoniosamente dimensionada, tornando-a mais agradável aos olhos do observador. As propriedades estéticas desse retângulo tiveram diversas aplicações nas Artes, como na Arquitetura, escultura e pintura (SILVA, 2018 *apud* SILVA, 2022).

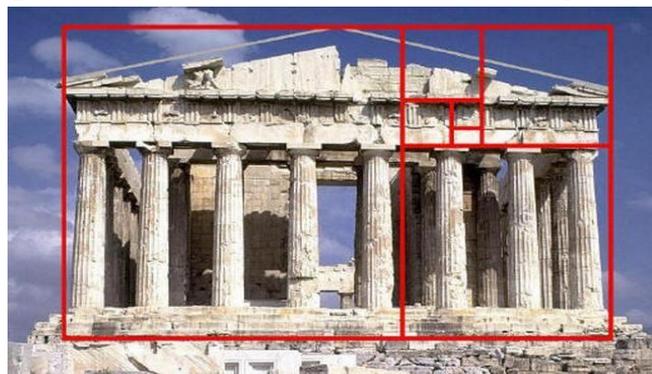
**Figura 2** – Retângulo de proporção áurea



Fonte: Lopes, 2014.

O Partenon, erguido em Atenas, Grécia, entre 447 e 436 a.C., é considerado um dos melhores exemplos da arquitetura grega, apresentando proporções que seguem o retângulo de ouro tanto em sua planta quanto em sua fachada frontal (SILVA, 2022), como pode ser visto na Figura 3.

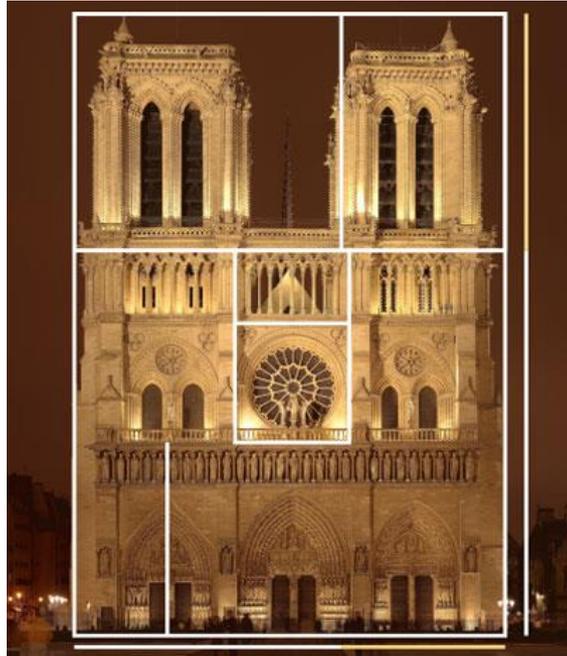
**Figura 3** – Fachada do Partenon com o retângulo áureo



Fonte: Lima, 2018.

A Catedral de Notre Dame, em Paris, França, erguida entre 1163 e 1345 em estilo gótico, incorporou o conceito do segmento áureo em sua fachada ocidental, conforme a Figura 4. Composta por três seções horizontais, a elevação da catedral permite a inclusão de vários retângulos de ouro em sua estrutura (SILVA, 2022).

**Figura 4** – Retângulo áureo aplicado na fachada da Catedral de Notre Dame



Fonte: Lima, 2018.

No Renascimento os arquitetos também utilizavam a proporção áurea em seus projetos. Nesse período destacaram-se vários arquitetos italianos como Brunelleschi, Alberti, Palladio e Leonardo da Vinci (MARQUES, 2017).

Uma obra de destaque são os Dez Livros de Arquitetura elaborados por Vitruvius. Ao longo desses livros podem ser observadas representações e desenhos que relacionam conhecimentos arquitetônicos, matemáticos e artísticos (HARTMANN; MALTEMPI, 2022). A Figura 5 mostra um quadro com os principais assuntos dos livros do arquiteto Vitruvius

**Figura 5** – Quadro com livros do arquiteto Vitruvius

Volume	Livro	Principais assuntos
I	Princípios de arquitetura	Formação do arquiteto; análise de cidade e muralhas; direção de ruas considerando a direção dos ventos.
II	História da arquitetura e materiais arquitetônicos	Origens da arquitetura, focalizado em materiais de construção, como areia, pedra e madeira, além de métodos de construção.
III	Templos jônicos	Simetria em templos e no corpo humano; proporção de colunas.
IV	Templos dóricos e coríntios	Detalha as portas e altares dos templos focos do livro.
V	Edifícios públicos, teatros, música, banhos e portos	Focaliza na construção de edifícios públicos, como fórum, teatro e basílica.
VI	Casas da cidade e do campo	Casas de estilo romano e grego, considerando clima, simetria e proporções.
VII	Decoração de interior	Trabalhos em estuque, pintura a fresco e materiais para a produção de cores naturais e artificiais.
VIII	Abastecimento de água	Como encontrar água, águas pluviais, poços e cisternas.
IX	Mostradores e relógios	Astronomia, ferramentas matemáticas (quadrado, construção de triângulo retângulo) e, relógio de sol e de água.
X	Engenharia mecânica com aplicações militares	Máquinas para fins militares e construção de edifícios, como para levantar e transportar pesos com uso de polia e alavanca.

Fonte: Hartmann e Maltempi, 2022.

Hartmann e Maltempi (2019) apontam que há uma prevalência de conexões entre Matemática e Arquitetura nos livros III e VI, evidenciadas pelo uso de simetria e proporção. O livro IX também se destaca ao abordar ferramentas matemáticas, com ênfase especial nas formas geométricas.

Conforme Santos *et al.* (2018), sabe-se que a forma arquitetônica está relacionada com as formas geométricas, podendo ser observada em um simples edifício prismático em diversas cidades ou até mesmo em outra edificação com formas mais complexas, que são traçados a partir de novos conceitos geométricos. Tanto a Geometria Euclidiana quanto os princípios da Geometria Não Euclidiana, como os fractais, a biônica e a topologia, influenciam a concepção e a definição das formas arquitetônicas contemporâneas, contribuindo para sua transformação (SOUZA, 2008 *apud* SANTOS *et al.*, 2018). Meirelles e Kishi (2013) destacam que as coberturas de espaços como estádios, museus, mercados, igrejas e praças são marcos arquitetônicos que apresentam formas diferenciadas e definem o espaço por meio de sua linguagem e função. A Figura 6 mostra alguns exemplos de arquiteturas diferenciadas

**Figura 6 – Exemplos arquitetônicos com formas diferenciadas**

Abondantus Gigantus - Enschede, Holanda



Museu de Arte de São Paulo (Masp) - São Paulo, Brasil



Museu do Louvre - Paris, França



Piano House - Anhui, China



Mesquita de Nasiralmolk - Shiraz, Irão



Basílica de São Pedro - Roma, Itália



Fonte: Compilação do autor<sup>1</sup>.

Portanto, independentemente da complexidade, a Matemática desempenha um papel crucial na Arquitetura, desde questões simples até aplicações mais elaboradas e estéticas (SILVA, 2022).

<sup>1</sup> Montagem a partir de imagens coletadas do blog Abordando a Matemática. Disponível em: <<https://abordandoamatematica.wordpress.com/2015/09/14/173/>>. Acesso em: 03 de maio de 2024.

### 3. PARABOLOIDES E APLICAÇÕES NA ARQUITETURA

Conforme Thomas, Weir e Hass (2012), Camargo e Boulos (2005) e Vasconcelos *et al.* (2010), superfície quádrlica é o lugar geométrico no espaço euclidiano 3D descrito por uma equação polinomial de segundo grau nas três variáveis  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , segundo a Equação 2

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (2)$$

em que  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$  e  $J$  são constantes e com pelo menos um dos coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  diferente de zero. Stewart (2016) destaca que as superfícies quádrlicas são as correspondentes tridimensionais das cônicas no espaço. O termo quádrlica é utilizado devido ao fato de que as equações que descrevem essas superfícies são equações de segundo grau (ou equações quadráticas) (CAMARGO; BOULOS, 2005). As superfícies quádrlicas básicas são: elipsoide, paraboloides elíptico, paraboloides hiperbólico, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas e cone elíptico (THOMAS; WEIR; HASS, 2012).

Segundo Vasconcelos *et al.* (2010), a partir da equação geral, pode-se representar cada quádrlica em um sistema de coordenadas conveniente, por uma equação da forma da Equação 2.1

$$Z = Ax^2 + By^2, A \neq 0 \text{ e } B \neq 0, \quad (2.1)$$

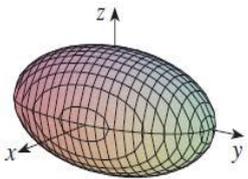
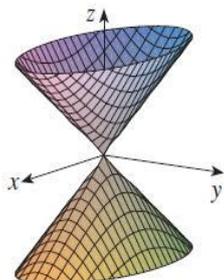
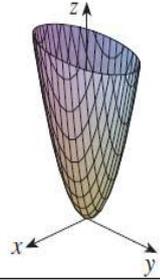
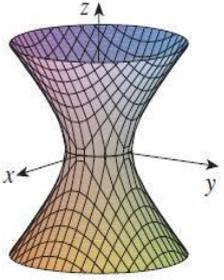
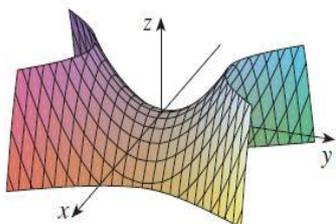
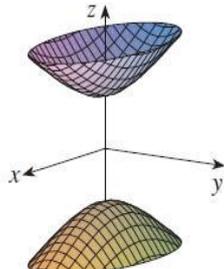
no caso do cone elíptico, paraboloides elíptico ou hiperbólico, ou da forma da Equação 2.2

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, A \neq 0, B \neq 0 \text{ e } C \neq 0, \quad (2.2)$$

no caso do elipsoide, hiperboloides de uma folha ou de duas folhas.

Stewart (2016) e Camargo e Boulos (2005) apontam que para esboçar o gráfico dessas superfícies, pode-se determinar as interseções das superfícies com planos paralelos aos planos coordenados. A essas curvas obtidas a partir das interseções, denominam-se cortes ou seções transversais da superfície. Além disso, é possível estudar essas curvas a partir de manipulações algébricas nas equações das superfícies quádrlicas, na qual verificam-se equações que descrevem as cônicas. Para isso, pode-se utilizar a equação reduzida de cada superfície. A Figura 7 mostra um resumo das superfícies quádrlicas básicas junto de suas equações reduzidas.

Figura 7 – Superfícies quádricas

Superfície	Equação	Superfície	Equação
<p>Elipsoide</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Todos os cortes são elipses. Se <math>a = b = c</math>, o elipsoide é uma esfera.</p>	<p>Cone</p> 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais nos planos <math>x = k</math> e <math>y = k</math> são hipérbolas se <math>k \neq 0</math>, mas são um par de retas quando <math>k = 0</math>.</p>
<p>Paraboloide Elíptico</p> 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais são parábolas. A variável elevada à primeira potência indica o eixo do parabolóide.</p>	<p>Hiperboloide de Uma Folha</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais são hipérbolas. O eixo de simetria corresponde à variável cujo coeficiente é negativo.</p>
<p>Paraboloide Hiperbólico</p> 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ <p>Cortes horizontais são hipérbolas. Cortes verticais são parábolas. O caso aqui ilustrado corresponde a <math>c &lt; 0</math>.</p>	<p>Hiperboloide de Duas Folhas</p> 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Cortes horizontais em <math>z = k</math> são elipses se <math>k &gt; c</math> ou se <math>k &lt; -c</math>. Cortes verticais são hipérbolas. Os dois sinais de menos indicam duas folhas.</p>

Fonte: Stewart, 2016.

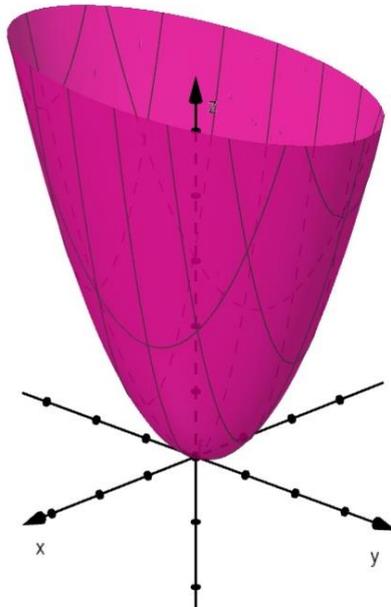
### 3.1. Paraboloide elíptico

Conforme Camargo e Boulos (2005), o paraboloide elíptico é a quádrlica descrita segundo a Equação 3

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (3)$$

com  $a$  e  $b$  números reais positivos e  $c \neq 0$ . Considerando-se  $c = 1$ , o gráfico dessa superfície obtido através do *GeoGebra* está representado na Figura 8.

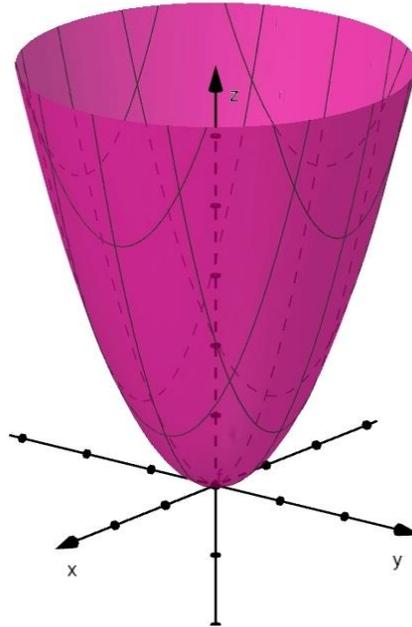
**Figura 8** – Paraboloide elíptico



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

O paraboloide elíptico, como o nome indica, é constituído por parábolas e elipses. Essas curvas podem ser obtidas a partir da interseção entre planos paralelos aos planos coordenados e a superfície. Se  $a = b$ , tem-se um paraboloide de revolução, como mostra a Figura 9, que pode ser gerado a partir da rotação de uma parábola em torno de seu eixo focal.

**Figura 9** – Parabolóide de revolução



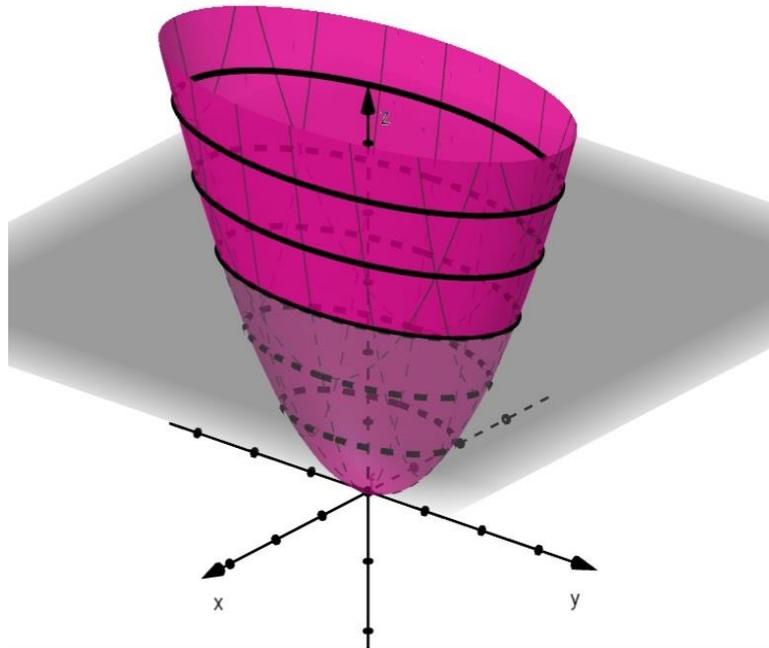
Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

Sendo  $k$  uma constante, a interseção do parabolóide elíptico com o plano de equação  $z = k$ , paralelo a  $Oxy$ , é equivalente ao sistema da Equação 3.1

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases} \quad (3.1)$$

em que admite solução para  $k = 0$ , no qual representa o ponto vértice do parabolóide elíptico, e para  $k > 0$ , no qual descreve elipses de reta focal paralela a  $Oy$ , como mostra a Figura 10. No caso do parabolóide de revolução, o sistema da Equação 3.1, para  $k > 0$ , descreve circunferências com centro em  $(0, 0, k)$ .

**Figura 10** – Interseção do parabolóide elíptico com o plano  $z = k$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

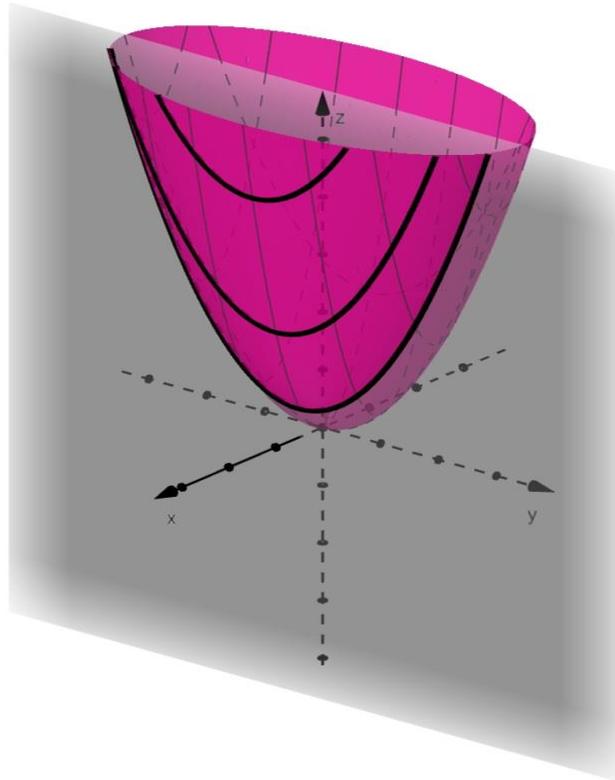
Para as interseções da superfície com o plano de equação  $x = k$ , paralelo a  $Oyz$ , e com o plano de equação  $y = k$ , paralelo  $Oxz$ , os sistemas equivalentes são, respectivamente, da forma da Equação 3.2 e da Equação 3.3

$$\begin{cases} z = \frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = k \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \quad (3.3)$$

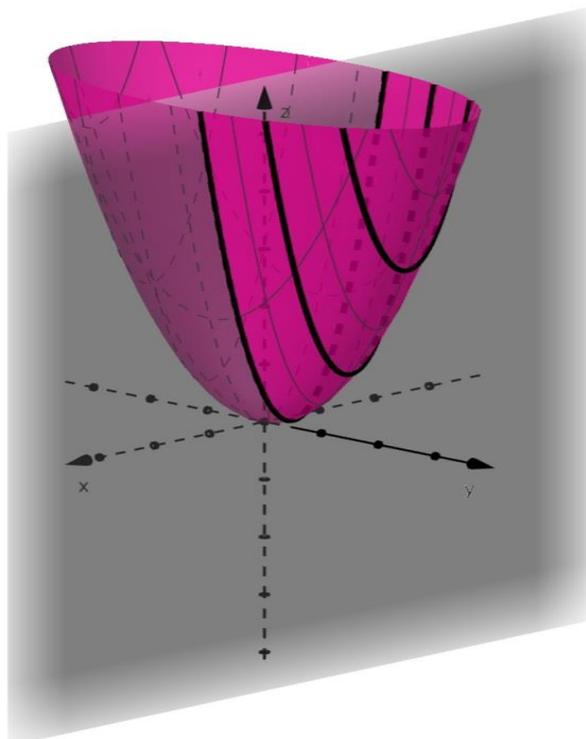
Assim, os sistemas das Equações 3.2 e 3.3 expressam parábolas de eixo focal paralelo a  $Oz$ , conforme as Figuras 11 e 12, respectivamente. Analogamente, para o parabolóide de revolução, as curvas obtidas também são parábolas.

**Figura 11** – Interseção do parabolóide elíptico com o plano  $x = k$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

**Figura 12** – Interseção do parabolóide elíptico com o plano  $y = k$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

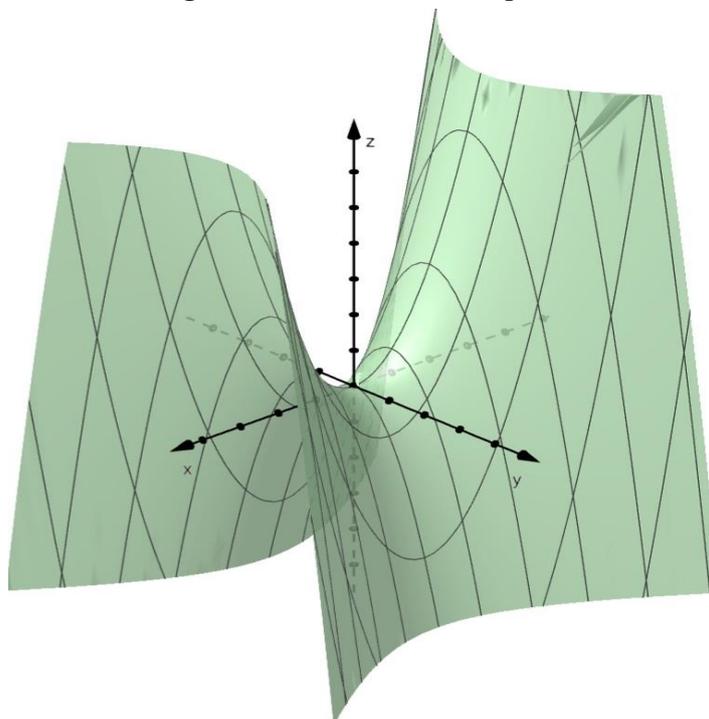
### 3.2. Paraboloide hiperbólico

Conforme Thomas, Weir, Hass (2012), o paraboloide hiperbólico pode ser descrito pela Equação 4

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (4)$$

sendo  $a$  e  $b$  dois números reais positivos e  $c \neq 0$ . Considerando-se  $c = 1$ , o gráfico dessa superfície quádrlica obtido através do *GeoGebra* está representado na Figura 13.

**Figura 13** – Paraboloide hiperbólico



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

O paraboloide hiperbólico é constituído de curvas parabólicas e hiperbólicas. Como no caso anterior, essas curvas podem ser obtidas a partir da interseção de planos horizontais ou verticais com a superfície quádrlica. Conforme Gómez, Frensel e Santo (2009), os planos horizontais são dados pela equação  $z = k$ , em que  $k$  é uma constante. Considera-se inicialmente  $k = 0$ . Segue o sistema da Equação 4.1

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

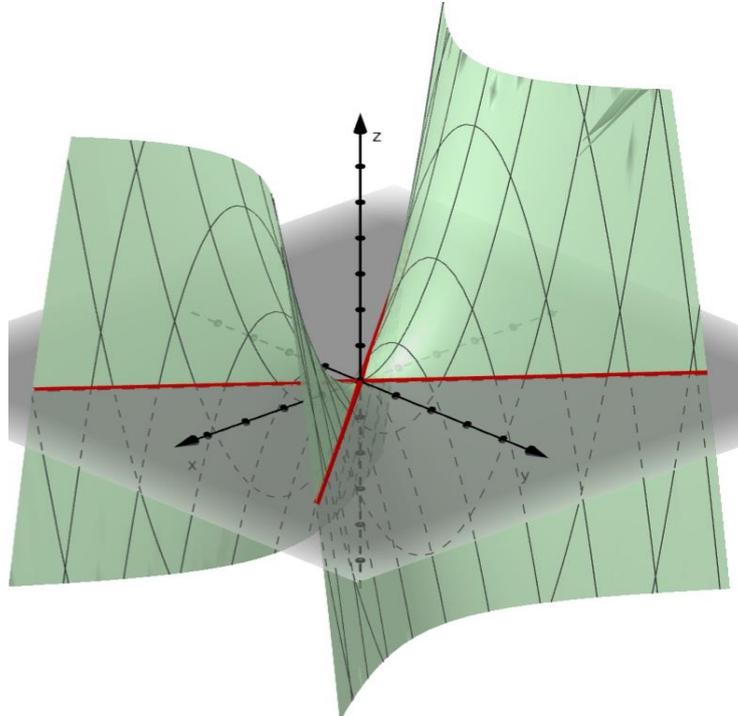
Da Equação 4.1, tem-se que

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0 \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \times \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \quad (4.3)$$

Observa-se que para  $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$  na Equação 4.3, tem-se que  $y = \frac{b}{a}x$  e para  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$  na Equação 4.3, tem-se que  $y = -\frac{b}{a}x$ , que são equações de retas. Com isso, no corte horizontal em  $z = 0$  observam-se duas retas que passam pela origem do plano  $Oxy$ , como mostra a Figura 14.

**Figura 14** – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano  $z = 0$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

Considera-se, agora, o caso de  $k \neq 0$ . Segue o sistema da Equação 4.4

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases} \quad (4.4)$$

Para  $k > 0$  na Equação 4.4, tem-se que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k \quad (4.5)$$

Ao dividir a Equação 4.5 por  $k$ , obtém-se

$$\frac{x^2}{ka^2} - \frac{y^2}{kb^2} = 1 \quad (4.6)$$

Para  $k < 0$  na Equação 4.4, tem-se que

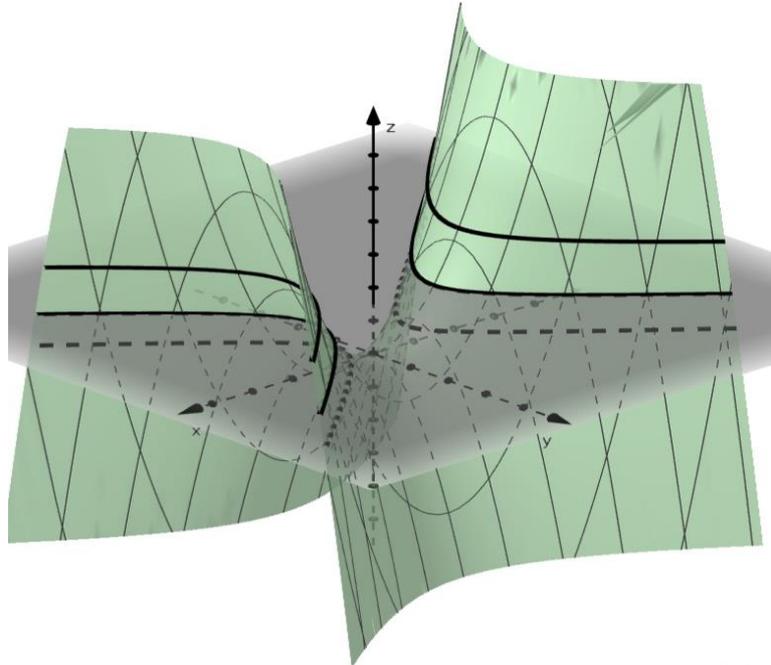
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -k \quad (4.7)$$

Ao dividir a Equação 4.7 por  $-k$ , obtém-se

$$-\frac{x^2}{ka^2} + \frac{y^2}{kb^2} = 1 \quad (4.8)$$

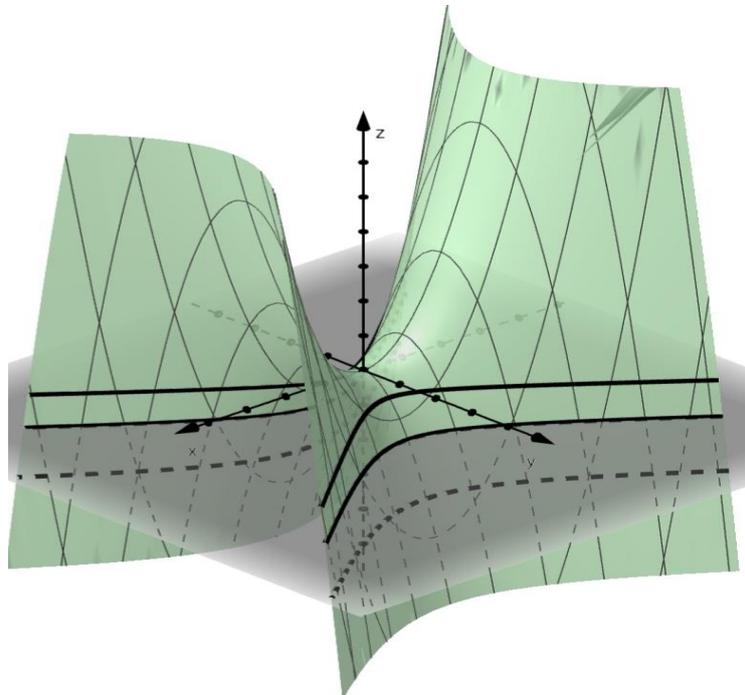
Verifica-se que as Equações 4.6 e 4.7 descrevem hipérboles de reta focal paralela a  $Ox$  e paralela a  $Oy$ , respectivamente. Dessa forma, os cortes do paraboloide hiperbólicos para os planos  $z = k$ , com  $k \neq 0$ , são hipérboles, como mostram as Figuras 15 e 16.

**Figura 15** – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano  $z = k$  para  $k > 0$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

**Figura 16** – Interseção do parabolóide com o plano  $z = k$  para  $k < 0$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

Para os planos verticais, Camargo e Boulos (2005), mostram que as interseções do parabolóide hiperbólico com os planos paralelos ao plano  $Oyz$  são descritas pelo sistema da Equação 4.9

$$\begin{cases} z = \frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \\ x = k \end{cases} \quad (4.9)$$

Como  $k$  é uma constante, tem-se da Equação 4.9 que

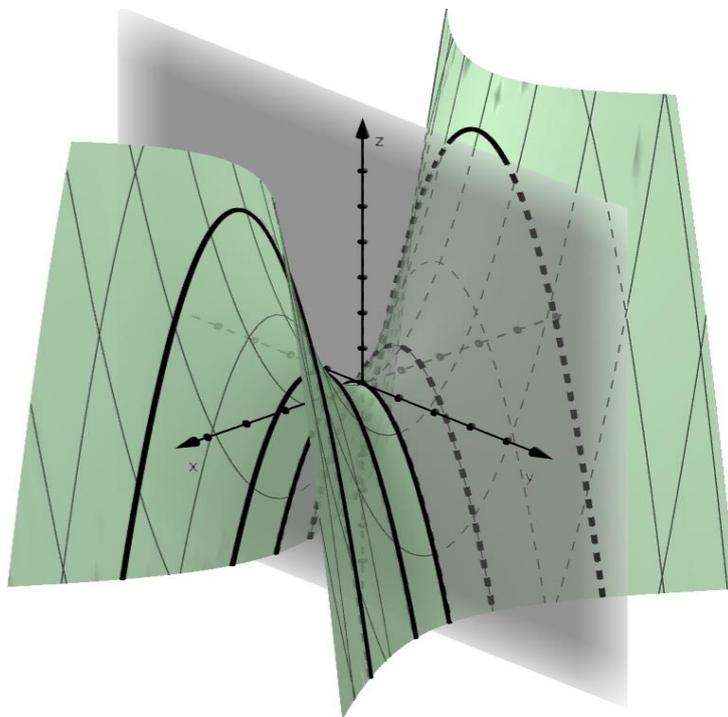
$$z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2} \quad (5)$$

Se na Equação 5,  $k = 0$ , por exemplo, obtém-se que

$$z = -\frac{y^2}{b^2} \quad (5.1)$$

que descreve uma parábola. Assim, as interseções do parabolóide hiperbólico com os planos dados pela equação  $x = k$  serão parábolas com a concavidade voltada para baixo, como indica a Figura 17.

**Figura 17** – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano  $x = k$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

Os autores também mostram que as interseções do parabolóide hiperbólico com os planos paralelos ao plano  $Oxz$  são descritas pelo sistema da Equação 5.2

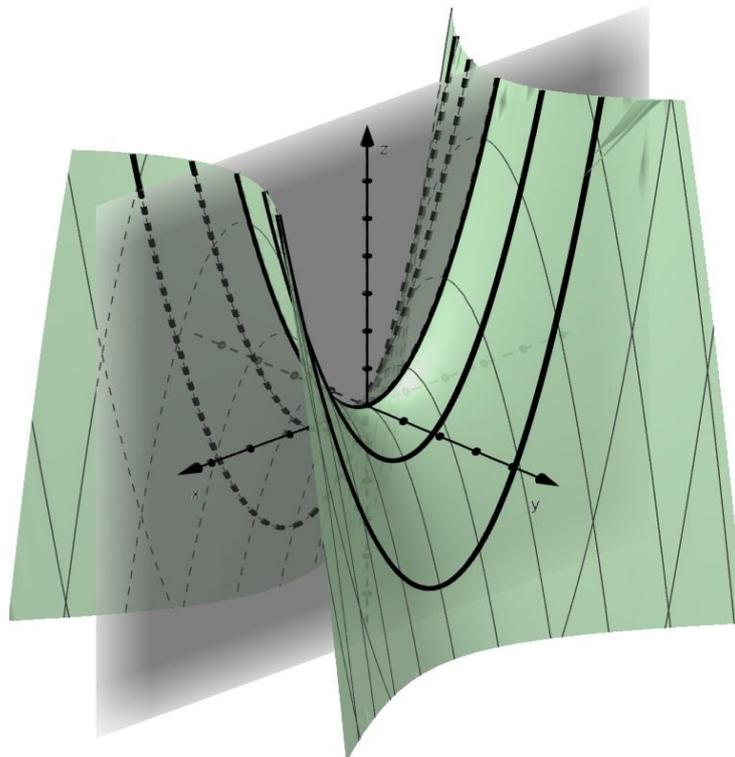
$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \quad (5.2)$$

Analogamente, sendo na Equação 5.2,  $k = 0$ , por exemplo, obtém-se

$$z = \frac{x^2}{b^2} \quad (5.3)$$

que, assim como no caso anterior, também descreve uma parábola. Portanto, as interseções do parabolóide hiperbólico com os planos dados pela equação  $y = k$  serão parábolas com a concavidade voltada para cima, conforme a Figura 18.

**Figura 18** – Interseção do parabolóide hiperbólico com o plano  $y = k$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

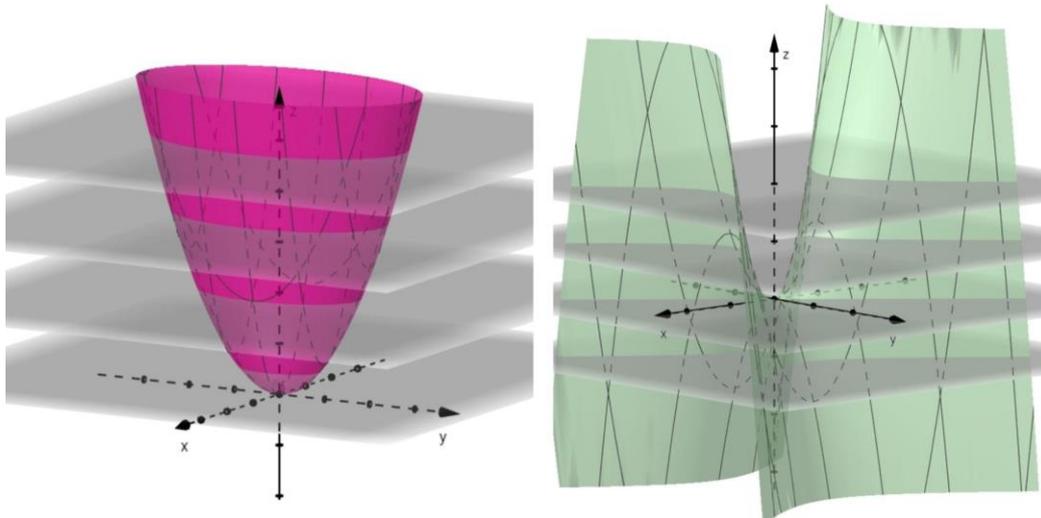
Thomas, Weir e Hass (2012) destacam que os parabolóides possuem simetria com os planos  $x = 0$  e  $y = 0$ . Os autores salientam ainda que próximo à origem, o parabolóide

hiperbólico tem um formato que se assemelha a uma sela de cavalo. Dessa forma, se um objeto caminha sobre a superfície no plano  $Oxz$ , a origem parece um ponto de mínimo, enquanto que se esse objeto caminha sobre a superfície no plano  $Oyz$ , a origem parece um ponto de máximo. Neste caso, o ponto é chamado de ponto de sela.

### 3.3. Curvas de nível dos paraboloides

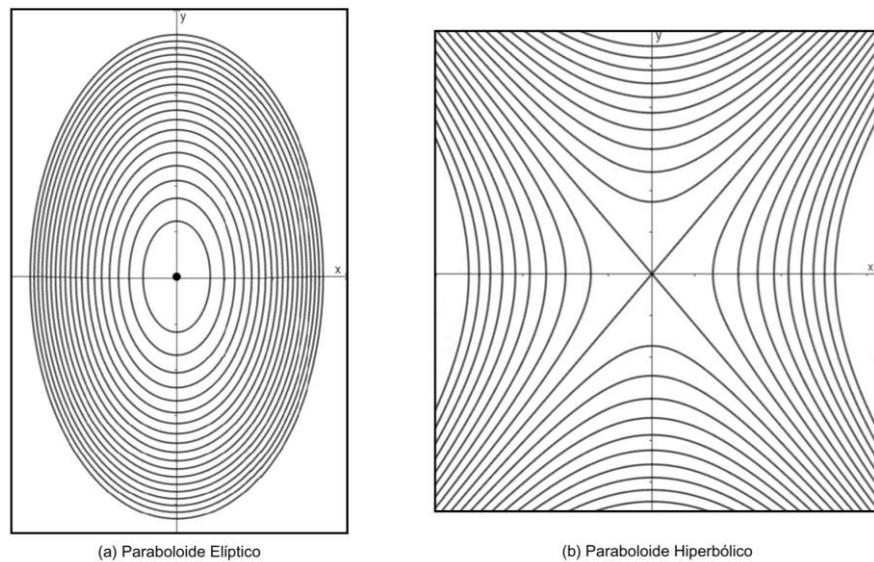
Devido a dificuldade de representar e visualizar gráficos de funções de duas variáveis, é interessante trabalhar com as curvas de nível do gráfico dessas funções, já que essa ferramenta permite observar informações de uma figura tridimensional em um gráfico bidimensional. Quando um plano  $z = k$  intercepta uma superfície  $z = f(x, y)$ , como mostra a Figura 25, a curva resultante projetada no plano  $Oxy$  é conhecida como curva de nível e é descrita pela equação  $f(x, y) = k$  (GUIDORIZZI, 2011).

**Figura 19** – Paraboloides interceptados por planos  $z = k$



Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

No caso dos paraboloides elíptico e hiperbólico, suas curvas de nível estão representadas na Figura 26.

**Figura 20** – Curvas de nível

Fonte: *GeoGebra*, 2024. (Elaborado pelo autor)

De acordo com Martins (2020), as curvas de nível no contexto da matemática funcionam como um recurso que auxilia na visualização de uma superfície a partir de sua forma seccionada. As curvas de nível são de extrema importância para outras áreas de estudo. Nos projetos arquitetônicos, permitem que seja feito o levantamento planialtimétrico do terreno, assim como na Engenharia e Agricultura, identificando desnivelamento e áreas que requerem correção. Na Meteorologia, possibilitam ligar regiões com a mesma temperatura, sendo chamadas de curvas isotérmicas, ou com a mesma pressão, nesse caso, curvas isobáricas (STEWART, 2016).

No parabolóide hiperbólico as curvas de nível obtidas para  $k > 0$  são hipérbolas com centro na origem do plano  $Oxy$  e reta focal coincidente a  $Ox$ . Já para  $k < 0$ , as curvas de nível também são hipérbolas com centro na origem, mas nesse caso com reta focal coincidente a  $Oy$ . Além disso, as curvas de nível para  $k = 0$  são um par de retas que passam pela origem. Já no caso do parabolóide elíptico as curvas de nível obtidas para  $k > 0$  são elipses com centro na origem do plano  $Oxy$ , eixo maior coincidente a  $Oy$  e eixo menor coincidente a  $Ox$ . Para  $k = 0$ , obtém-se um ponto situado na origem do plano  $Oxy$ .

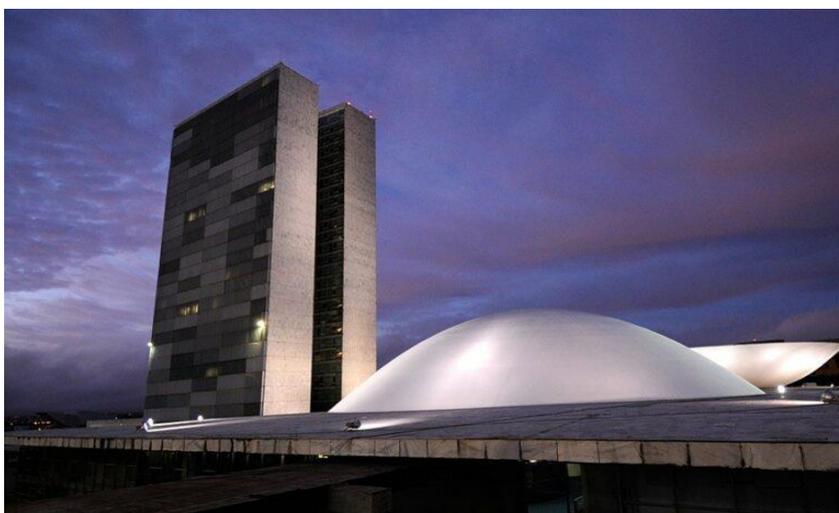
### 3.4. Aplicações dos parabolóides na Arquitetura

Dadas as características dessas superfícies matemáticas estudadas, os parabolóides são utilizados como inspiração em obras arquitetônicas. Segundo Gonçalves (2017), o uso do

paraboloide hiperbólico na Arquitetura é motivado pela resistência estrutural permitida por essa superfície e sua continuidade entre interior e exterior. Já o paraboloide elíptico, Matos e Fernandes (2019) apontam que essa forma oferece resistência de maneira a vencer grandes vãos com uso mínimo de material. Com isso, destacam-se alguns exemplos arquitetônicos que possuem relação com os paraboloides discutidos anteriormente.

O Congresso Nacional, conforme a Figura 21, é um símbolo de Brasília, com sua Arquitetura monumental projetada por Oscar Niemeyer e construída por Joaquim Cardozo, destacando-se pelo uso inovador do concreto armado, especialmente em formas curvas e em casca (MATOS; FERNANDES, 2019).

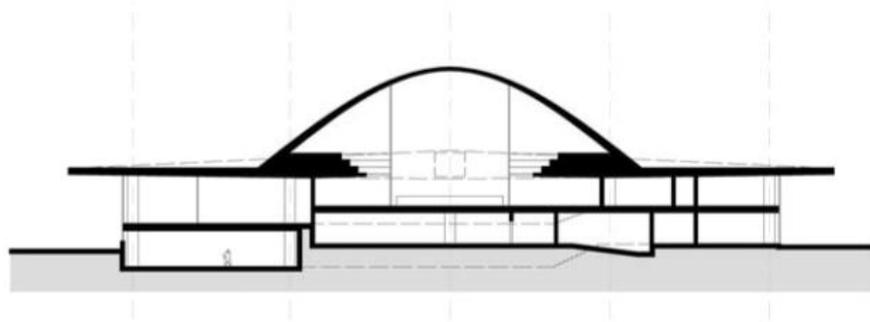
**Figura 21** – Cúpula do Senado Federal



Fonte: Fernandes, 2022.

Segundo Matos e Fernandes (2019), a cúpula do Senado Federal é um paraboloide de revolução. As autoras destacam que as cúpulas são estruturas de superfície não plana, conhecidas como cascas de revolução. Elas são formadas por sucessivos arcos, com uma das dimensões, a espessura, muito menor que as outras duas dimensões. Durante os estudos iniciais de concepção, Oscar Niemeyer planejou que a cúpula do Senado tivesse a forma geométrica de um paraboloide de revolução. Com cerca de 39 metros de diâmetro e aproximadamente 10 metros de altura, foi projetada para resistir às tensões de compressão. A Figura 22 mostra um corte da cúpula do Senado Federal.

**Figura 22** – Cúpula do Senado - Corte



Fonte: Silva, 2012.

O planetário do Parque Ibirapuera em São Paulo exteriormente possui a forma de um parabolóide, conforme a Figura 23, enquanto internamente apresenta uma esfera para as projeções da abóbada celeste. (KILHIAN, 2019).

**Figura 23** – Planetário do Parque Ibirapuera



Fonte: Autor, 2024.

Obra do arquiteto Felix Candela e localizado em Xochimilco, hoje Cidade do México, o restaurante *Los Manantiales*, como indica a Figura 24, foi construído em 1957 e é formado pela interseção de quatro parabolóides hiperbólicos (DUQUE, 2017).

**Figura 24** – Restaurante *Los Manantiales*



Fonte: Lauriola, 2017.

Segundo Gonçalves (2017), a dupla curvatura do parabolóide hiperbólico possibilita a redução da espessura da casca de concreto. O espaço interno é fechado por painéis de vidros que se sustentam nas parábolas centrais de cada abertura dos quatro parabolóides (DUQUE, 2017), como mostra a Figura 25.

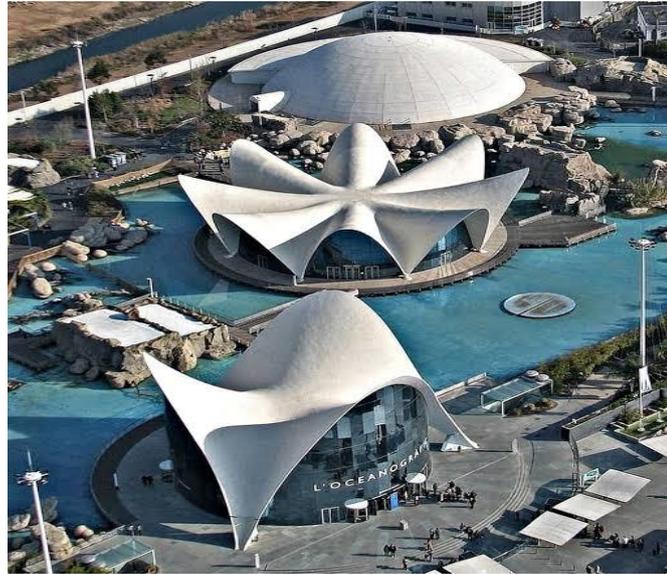
**Figura 25** – Parte interna do restaurante *Los Manantiales*



Fonte: Duque, 2017.

Localizado em Valência, na Espanha, o *L'Oceanogràfic*, conforme a Figura 26, é um aquário que promove a conservação da vida marinha, além de ser espaço para o desenvolvimento de projetos de pesquisa. A construção é obra do arquiteto Félix Candela e dos engenheiros Alberto Domingo e Carlos Lázaro (ANDRADE; GRIZOTTO, 2020). Por ser um projeto do mesmo arquiteto, possivelmente a ideia de construir o *L'Oceanogràfic* com esse formato é a mesma utilizada na construção do *Los Manantiales*.

**Figura 26** – Aquário *L'Oceanogràfic*



Fonte: Valencia Travel<sup>2</sup>, 2023.

Localizada em Tóquio, no Japão, a Catedral de Santa Maria, indicada na Figura 27, foi construída pelo arquiteto Kenzo Tange, substituindo a antiga catedral de madeira queimada na Segunda Guerra Mundial. Essa catedral possui oito paredes curvas hiperbolicamente que sustentam toda a estrutura (GIANNOTTI, 2011).

**Figura 27** – Catedral de Santa Maria



Fonte: Giannotti, 2011.

---

<sup>2</sup> Disponível em: < <https://infovalenciatravel.com/oceanografic-valencia/>>. Acesso em 08 de maio de 2024.

#### 4. A TÉCNICA *SLICEFORM*

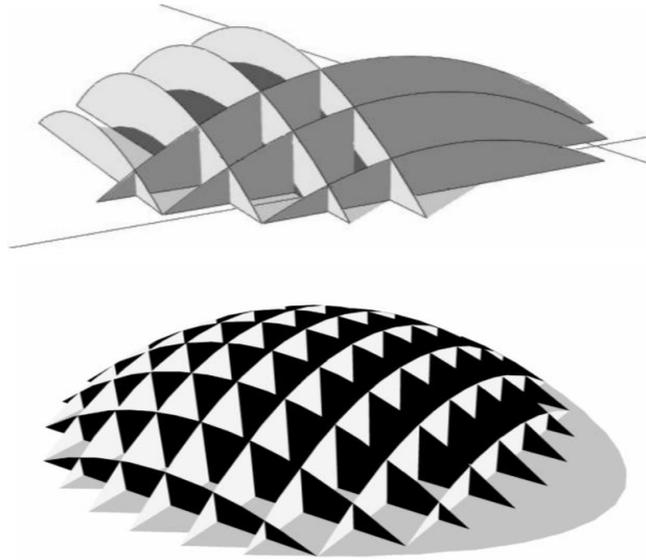
Durante o século XVII, Fermat e Descartes desenvolveram uma maneira de representar a Geometria de forma algébrica. Porém, na segunda metade do século XIX, a medida que estudos de superfícies matemáticas eram gradualmente desenvolvidos, as superfícies passaram a ser modeladas física e algebricamente. A Grande Exposição de 1851 no Hyde Park, em Londres, promoveu exposições de frutos da Arte e Tecnologia. À medida que a exposição de modelos ganhava visibilidade, o matemático Félix Klein acreditava que era fundamental ter uma imagem real do objeto de estudo, e ele mesmo fez modelos de gesso e incentivou seus alunos. Assim, várias empresas passaram a produzir modelos de superfícies, os quais eram vendidos ou exibidos em museus (SHARP, 2004).

Os modelos que inspiraram o *Sliceform*, foram inventados pelo matemático Olaus Henrici e foram fabricados pelo matemático Alexander von Brill em Darmstadt, na Alemanha. Esses modelos foram descritos como modelos que se distinguem dos demais construídos, devido à sua mobilidade, cujas formas do objeto podem ser convertidas em uma figura plana (SHARP, 2004).

Conforme Watson (2021), a “engenharia de *papercraft*” cresceu à medida que pesquisadores e *designers* recorrem ao *papercraft* em busca de inspirações para o *design* de novas estruturas a partir de folhas de papel. Assim, muitos padrões são criados a partir de uma folha inicialmente plana por uma série de dobraduras, que ao final revelam uma forma tridimensional pronta para uso. No entanto, o autor destaca que se em vez de dobrar uma folha de papel, uma estrutura volumétrica possa ser gerada encaixando várias folhas por meio de interseções. Esse é o princípio básico do *Sliceform*. O termo "*Sliceform*" foi cunhado para descrever que os modelos são feitos a partir de um conjunto de *slices* (fatias). Esse nome foi inventado por Gerald Jenkins (SHARP, 2004).

Ao criar e manusear fisicamente os modelos de *Sliceform*, suas qualidades dinâmicas podem ser exploradas. Os objetos modelados são definidos ou sugeridos por dois conjuntos de fatias paralelas que se interceptam (SHARP, 1995), como indica a Figura 28. Segundo Monera (2018), essa técnica envolve o uso da curva de interseção entre a superfície e planos perpendiculares, com as equações  $x = k$  e  $y = k$ . Essas interseções funcionam como uma multiplicidade de dobradiças e, como consequência, cada modelo pode ser achatado de duas maneiras diferentes (SHARP, 1995).

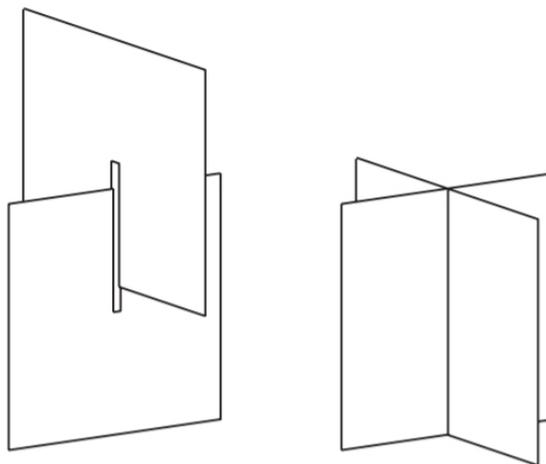
**Figura 28** – Exemplo de modelagem via *Sliceform*



Fonte: Luecking, 2006.

Além disso, o método de construção utiliza curvas de seção transversal da superfície dispostas ao longo de uma grade ortogonal  $x$  e  $y$ , de modo que as curvas se cruzem em cada interseção da grade. As curvas se apresentam como as bordas de fatias planares do volume contido pela superfície. Uma série de fatias  $x$  então se intercepta com uma série de fatias  $y$  para reproduzir a superfície e seu volume (LUECKING, 2006). Assim, Sharp (2004) aponta que essas curvas são dispostas em distâncias regulares em duas direções, de modo que, quando vistos de cima, as fatias se encaixem em uma grade. Uma fenda é cortada para cima ou para baixo a partir dos pontos de interseção da grade em cada fatia, conforme mostra a Figura 29.

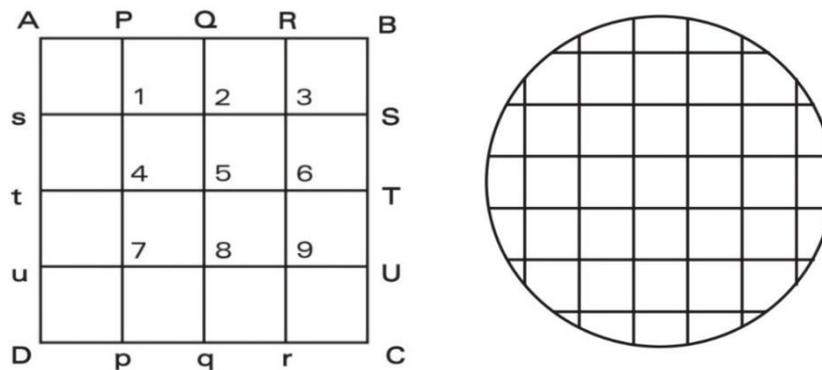
**Figura 29** – Interseção entre fatias



Fonte: Sharp, 2004.

Para construir um modelo via *Sliceform*, pode-se seguir algumas etapas, segundo Sharp (2004). O autor destaca que o primeiro passo consiste em estabelecer um plano de grade, conforme mostra a Figura 30.

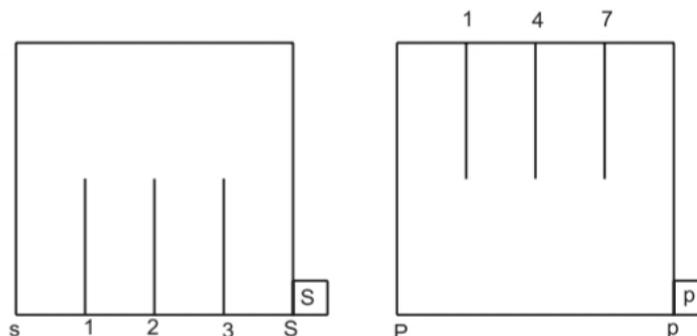
**Figura 30** – Exemplos de planos de grades



Fonte: Sharp, 2004.

A base do cubo tem os cantos *ABCD*. Os dois conjuntos de fatias são referidos pelas direções cartesianas convencionais de  $x$  e  $y$ . Assim, as fatias que se encaixam acima das linhas de grade *sS*, *tT*, *uU* são as fatias  $x$  e aquelas acima das linhas de grade *pP*, *qQ*, *rR* são as fatias  $y$  (SHARP, 2004). Conforme o autor, o segundo passo consiste em projetar as fatias. Para ele, esta etapa é a mais envolvente. É muito incomum criar modelos tridimensionais que possuam apenas um único tipo de fatia, embora as fatias nas duas direções da grade possam ter a mesma forma. Ao marcar a posição das fendas, deve-se utilizar a grade para encontrar suas posições. Por exemplo, no caso do cubo, as fatias correspondentes às linhas de grade *pP* e *sS* são mostradas na Figura 31.

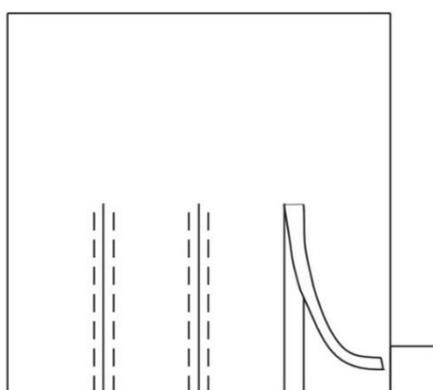
**Figura 31** – Fatias do cubo



Fonte: Sharp, 2004.

Note que há etiquetas na parte inferior das fatias. Isso ajuda a identificar a orientação correta de cada fatia na grade e a montagem do modelo (SHARP, 2004). Em seguida, é importante que as peças sejam recortadas corretamente. Conforme mostra a Figura 31, os modelos têm linhas que indicam onde as peças devem ser recortadas. No entanto, pode-se fazer dois cortes em cada linha, um à direita e outro à esquerda, como indicado na Figura 32. Isso ocorre porque, como as peças se encaixam, é necessário deixar um pequeno espaço para que elas possam ser montadas (MONERA, 2018).

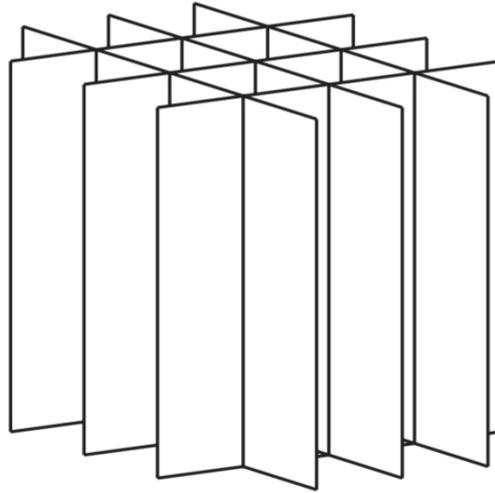
**Figura 32** – Cortes na fatia do cubo



Fonte: Sharp, 2004.

Segundo Monera (2018), uma vez que todas as peças estão recortadas, o próximo passo é montar a figura. Apesar de existir várias maneiras de começar a montar as figuras, uma das mais simples é montá-las de dentro para fora, ou seja, começando pelas peças maiores (ou internas) e terminando nas menores (ou externas), pois desta forma proporciona mais estabilidade para o modelo construído. Feita a montagem, o modelo do cubo, por exemplo, se assemelha ao mostrado na Figura 33.

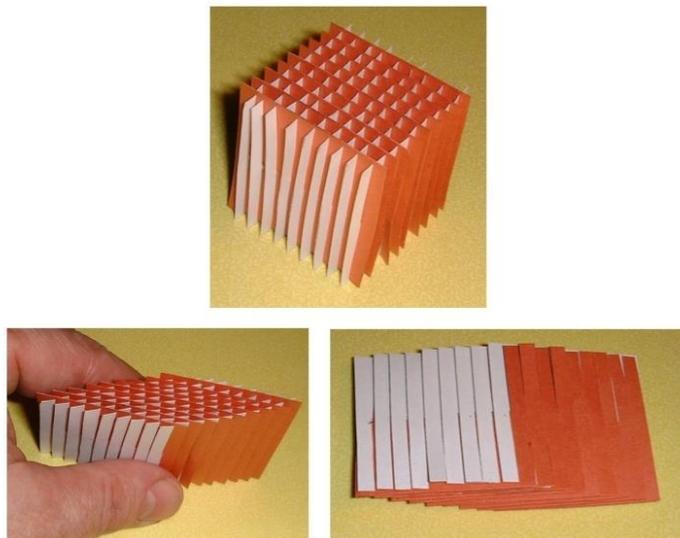
**Figura 33** – Cubo construído via *Sliceform*



Fonte: Sharp, 2004.

O último processo é garantir que todas as fatias estejam firmemente encaixadas e que o modelo se dobre corretamente em ambas as direções. Quando todas as fatias estiverem encaixadas, dobre o modelo suavemente até que ele assuma uma forma plana (SHARP, 2004), como mostra a Figura 34.

**Figura 34** – Planificação do cubo construído via *Sliceform*



Fonte: Sharp, 2004.

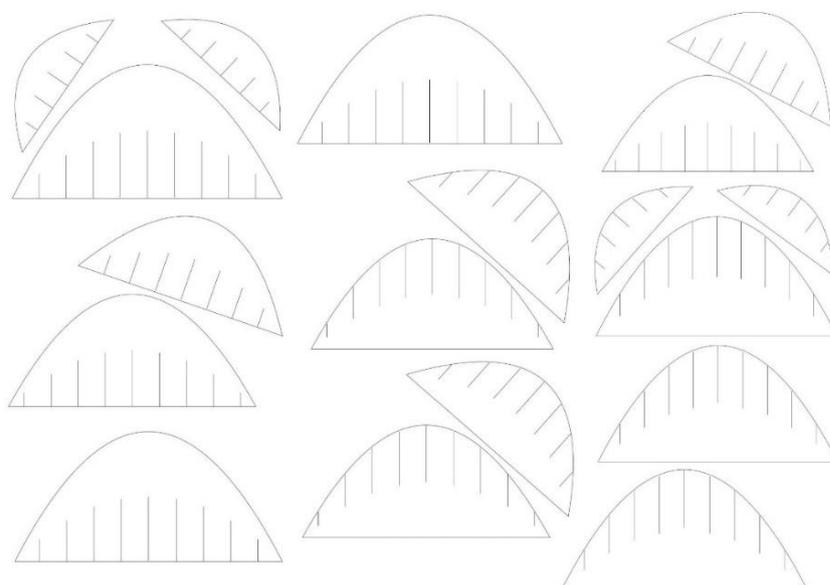
Fotos e exibições de modelos de Sliceform não mostram toda a sua beleza. Somente ao criar e manipular fisicamente os modelos é possível apreciar completamente suas verdadeiras qualidades dinâmicas. Modelar e construir essas esculturas proporciona *insights* tanto para artistas quanto para matemáticos. Além disso, elas podem servir como ponto de partida para

outros tipos de esculturas, como moldagem em gesso, uma vez que os espaços entre os cortes formam tubos ocos. Isso demonstra a interseção intrigante entre a Arte e a Matemática, abrindo portas para diversas possibilidades criativas (SHARP, 2002).

## 5. CONSTRUINDO E EXPLORANDO OS MODELOS DE PARABOLOIDES VIA *SLICEFORM*

Para a construção do parabolóide de revolução utilizando a técnica *Sliceform*, utilizou-se o *template* disponibilizado no site *Sliceforms Project*. O site, além de possuir o *template* do parabolóide de revolução, também possui outros templates de superfícies matemáticas para serem construídas a partir do *Sliceform*. A Figura 35 mostra as fatias do parabolóide de revolução.

**Figura 35** – *Template* das fatias do parabolóide de revolução



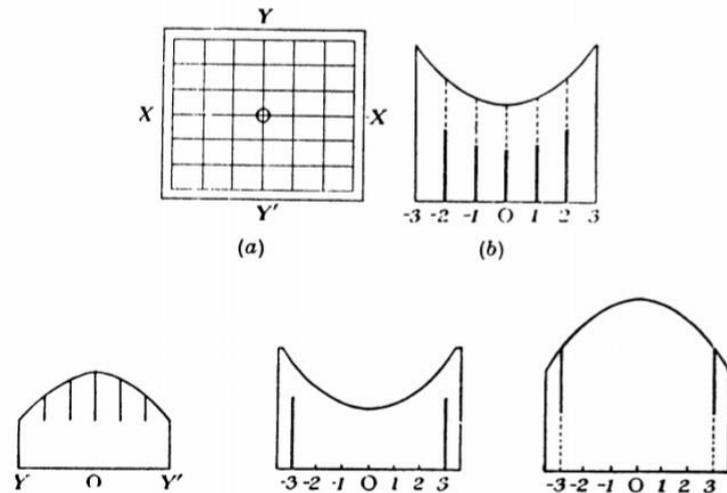
Fonte: *Sliceforms Project*<sup>3</sup>, 2024.

Já para a construção do parabolóide hiperbólico através da técnica *Sliceform*, utilizou-se o *template* disponibilizado no site *Cut Out Fold up*, no qual apresenta um passo a passo de construção do modelo. O *template* teve como referência o livro “*Mathematical Models*” de H. Martyn Cundy e A. P. Rollett, que traz um processo de modelagem do parabolóide hiperbólico via *Sliceform*, indicado na Figura 36.

---

<sup>3</sup> Disponível em: < <https://www.sliceformsproject.com/>>. Acesso em: 04 de jun. de 2024.

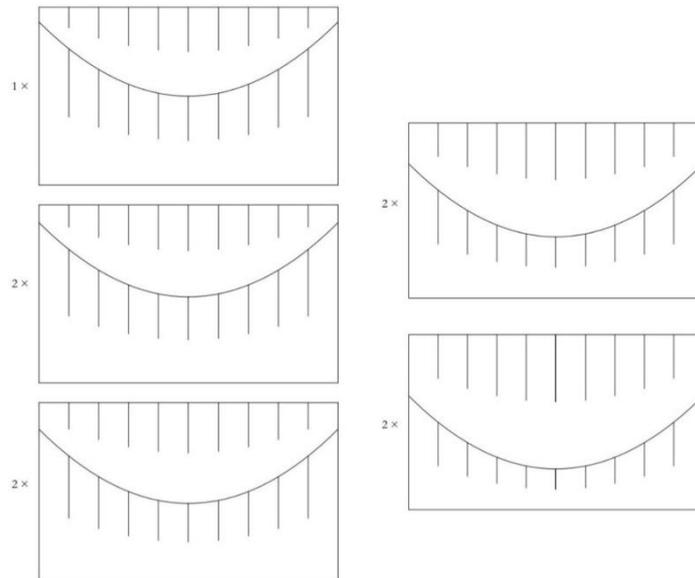
**Figura 36** – Modelagem do parabolóide hiperbólico via *Sliceform*



Fonte: Cundy e Rollett, 1961.

A Figura 37 mostra as fatias do parabolóide hiperbólico.

**Figura 37** - Template das fatias do parabolóide hiperbólico



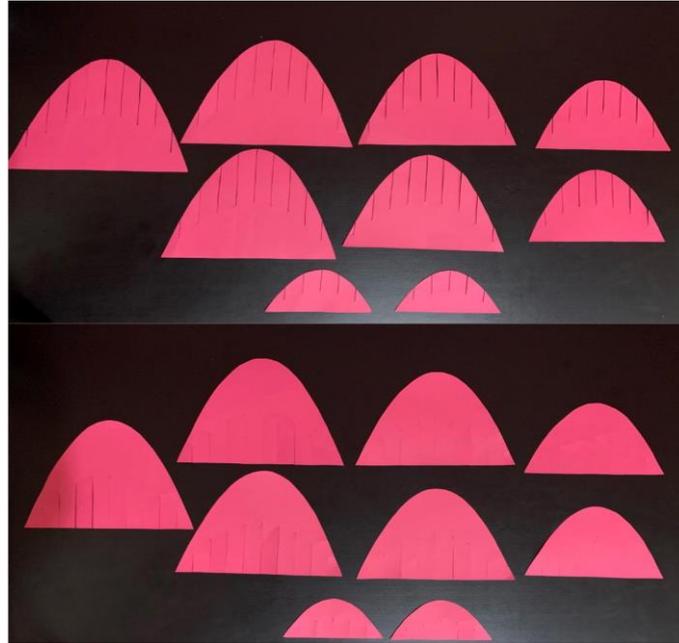
Fonte: Cut Out Fold Up<sup>4</sup>, 2024

Após obter os *templates* dos parabolóides, o passo seguinte envolveu o desenvolvimento dos modelos, que consistiu na implementação prática da técnica *Sliceform* para criar os modelos tridimensionais dos parabolóides. Essa etapa envolveu a seleção dos materiais, o processo de construção (passo a passo) e a documentação fotográfica para ilustrar o procedimento. Na

<sup>4</sup> Disponível em: <<https://www.cutoutfoldup.com/972-hyperbolic-paraboloid-from-parabolic-cross-sections.php>>. Acesso em: 04 de jun. de 2024.

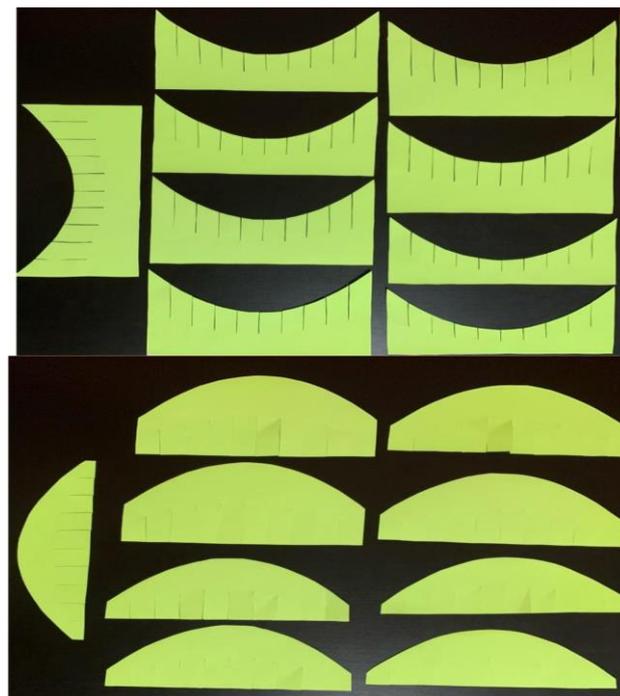
confeção dos modelos, utilizou-se papel colorido de 180 g/m<sup>2</sup>, que conferiu resistência aos modelos confeccionados, tesoura, e moldes de *Sliceform* disponibilizados pelos *links* indicados. Para a construção dos modelos, foi impresso os moldes em folha A4 e utilizados como base para fazer o recorte das fatias em papel colorido, conforme as Figuras 38 e 39.

**Figura 38** – Fatias do parabolóide de revolução em papel colorido



Fonte: Autor, 2024.

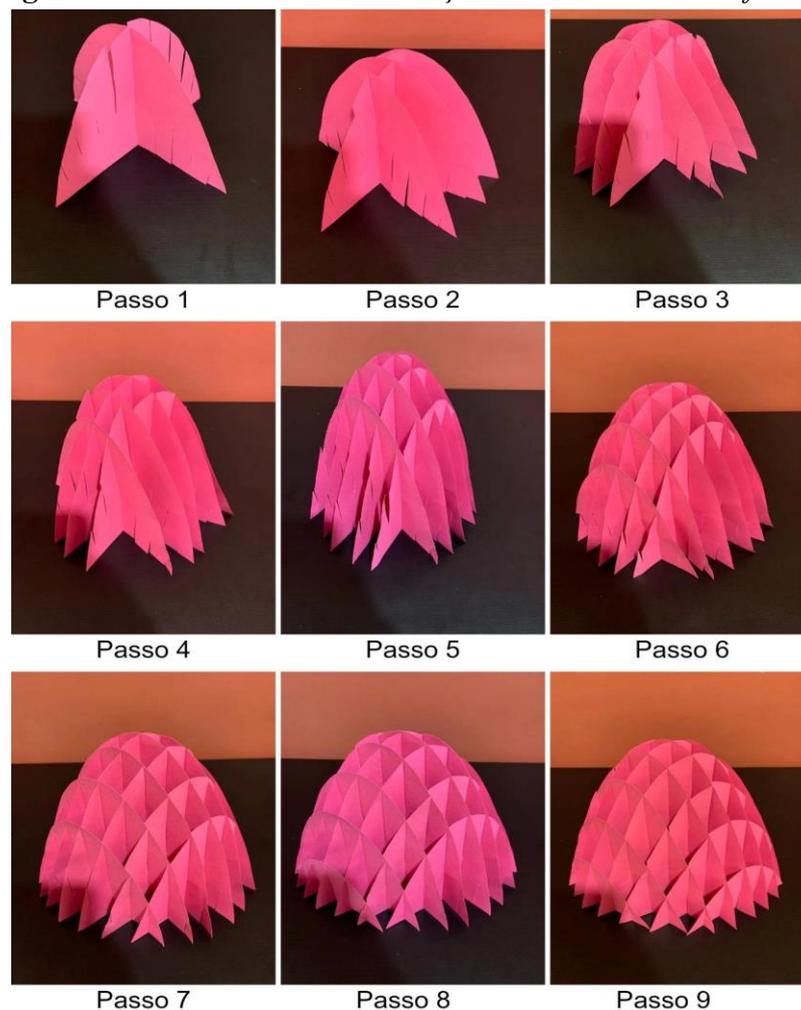
**Figura 39** – Fatias do parabolóide hiperbólico em papel colorido



Fonte: Autor, 2024.

Segundo Monera (2018), existe uma infinidade de maneiras de construir os modelos. No entanto, é importante se certificar de que as peças tenham sido recortadas corretamente. Como observa-se nas Figuras 38 e 39 foi feito cortes nas fatias seguindo as linhas que indicam o local onde deve ser feito recortes, conforme as Figuras 35 e 37. Percebe-se que em apenas uma parte das fatias de cada parabolóide foi feito corte seguindo o indicado na Figura 32, isso se deu pois para o tipo de papel utilizado na confecção dos modelos, só um corte dessa forma em uma parte das fatias foi o suficiente para garantir um melhor encaixe das peças. Com isso, a depender do papel utilizado, pode ser necessário ou não fazer um corte mais largo nas fatias da superfície que se queira construir. Após o recorte das fatias, seguiu-se o passo a passo de montagem indicado em Sharp (2004). A Figura 40 mostra o processo de montagem das peças do parabolóide de revolução, enquanto que a Figura 41 indica a montagem do parabolóide hiperbólico.

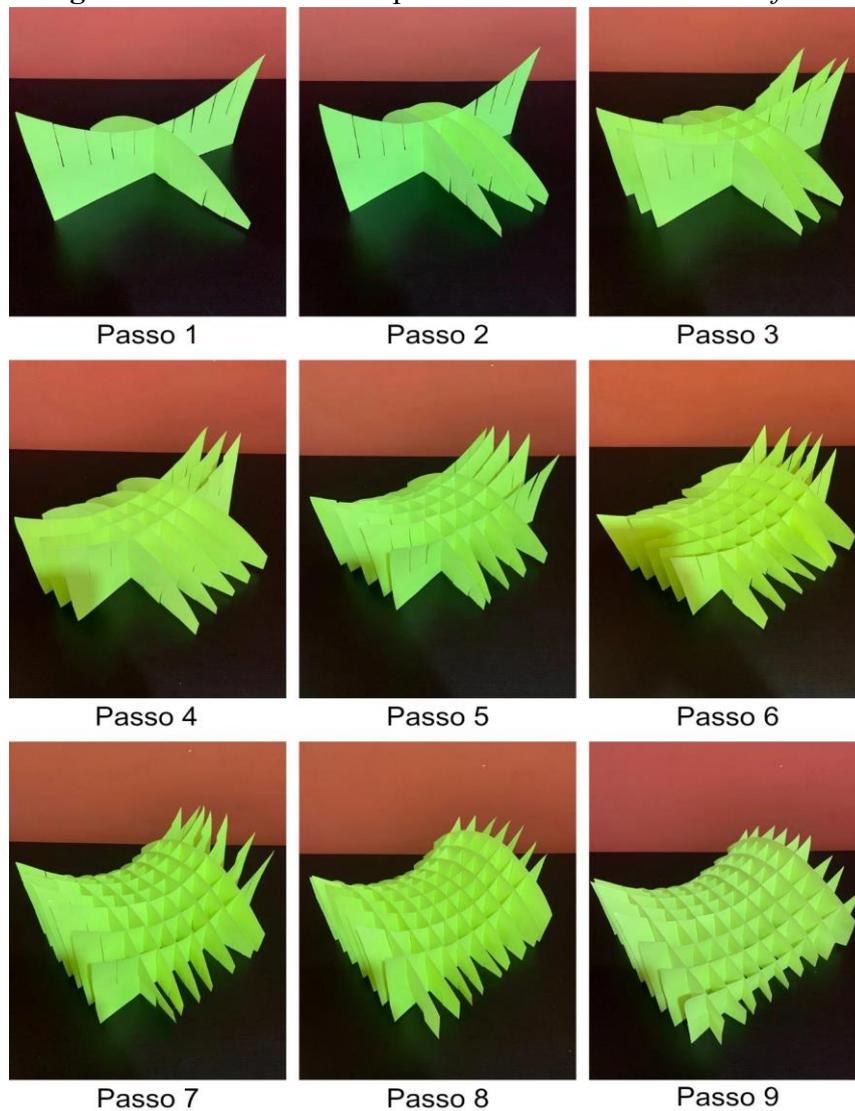
**Figura 40** – Parabolóide de revolução construído via *Sliceform*



Fonte: Autor, 2024.

A construção do parabolóide de revolução via *Sliceform* ficou dividida em nove passos. O processo se iniciou com o encaixe das fatias centrais, sendo uma peça com corte na base e outra com corte no topo, e em seguida seguiu-se encaixando as demais peças, sempre de duas em duas, isto é, duas com corte na base e depois duas com corte no topo. Pensando no plano de grade do modelo, é como se o encaixe fosse feito uma vez na direção  $x$  e outra na direção  $y$ . Além disso, optou-se por construir o modelo de dentro para fora, ou seja, da parte mais interna (ou central) da superfície até sua parte mais externa (ou a borda) da superfície.

**Figura 41** – Parabolóide hiperbólico construído via *Sliceform*



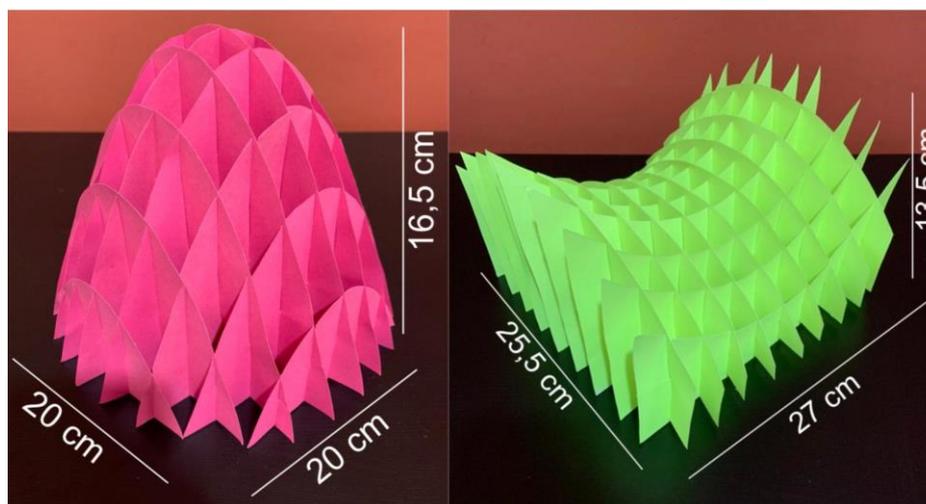
Fonte: Autor, 2024.

Analogamente, a construção do parabolóide hiperbólico ficou dividida em nove passos. Para essa superfície também se iniciou a montagem com o encaixe das fatias centrais do modelo. Em seguida, fez-se o encaixe das demais peças duas a duas pensando em seu plano de

grade, isto é, um encaixe de duas peças na direção  $x$  e um encaixe de duas peças na direção  $y$  tal como no caso anterior. Também se optou por construir o modelo da parte mais central da superfície até suas bordas. Além disso, observe que neste segundo caso é mais fácil a visualização da montagem do modelo devido as suas fatias possuírem formatos diferentes, o que não é o caso do modelo anterior, cujas fatias são semelhantes, se diferenciando apenas pela localização do corte.

Após a etapa de construção, obteve-se um modelo do parabolóide elíptico cujas dimensões são: 20 cm de comprimento, 20 cm de largura e 16,5 cm de altura. Já o modelo do parabolóide hiperbólico as dimensões são: 27 cm de comprimento, 25,5 cm de largura e 13,5 cm de altura.

**Figura 42** – Dimensões dos modelos construídos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após a modelagem das superfícies via *Sliceform*, a etapa seguinte da pesquisa envolveu a análise dos modelos construídos, considerando suas precisões em representar os parabolóides e as possibilidades do *Sliceform*.

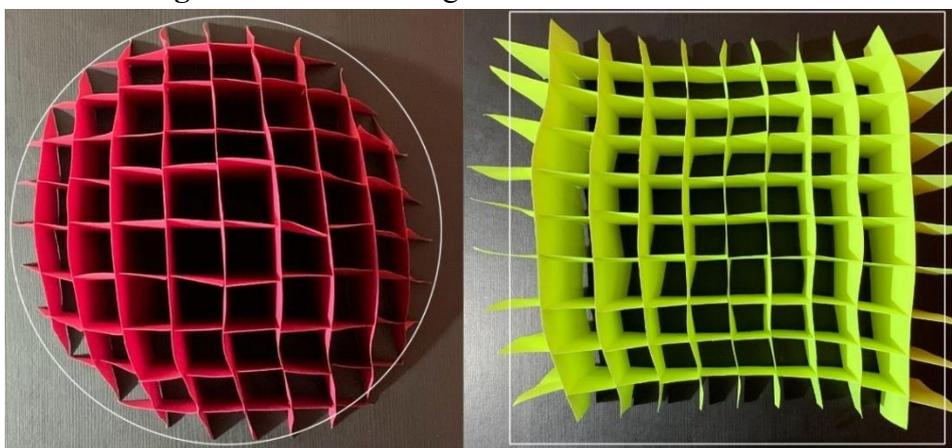
Observou-se que os modelos de parabolóides obtidos por meio de *Sliceform* apresentaram uma notável fidelidade em relação às superfícies estudadas quando se compara os modelos construídos e as representações gráficas (Figuras 8, 9 e 13), o que sugere uma vantagem em utilizar a técnica para modelar e construir superfícies matemáticas.

Além disso, pode-se perceber uma precisão na reprodução das curvaturas e contornos dos parabolóides, demonstrando a eficácia da técnica *Sliceform* na modelagem de objetos geométricos complexos para formas tangíveis e manipuláveis. Por se tratar de uma técnica que se baseia nas seções transversais das superfícies, em particular através das curvas obtidas entre

a superfície e planos de equação  $x = k$  ou  $y = k$ , notou-se que essas curvas dos paraboloides foram de fato consideradas na modelagem das superfícies via *Sliceform*. As parábolas que aparecem nos gráficos das Figuras 11, 12, 17 e 18 podem ser visualizadas nas fatias que compõem os modelos construídos.

Ao visualizar os modelos de cima foi possível identificar os planos de grade que foram utilizados no processo de modelagem das fatias, como indica a Figura 57. Para o parabolóide de revolução, utilizou-se uma grade circular, enquanto que para o parabolóide hiperbólico se utilizou uma grade retangular.

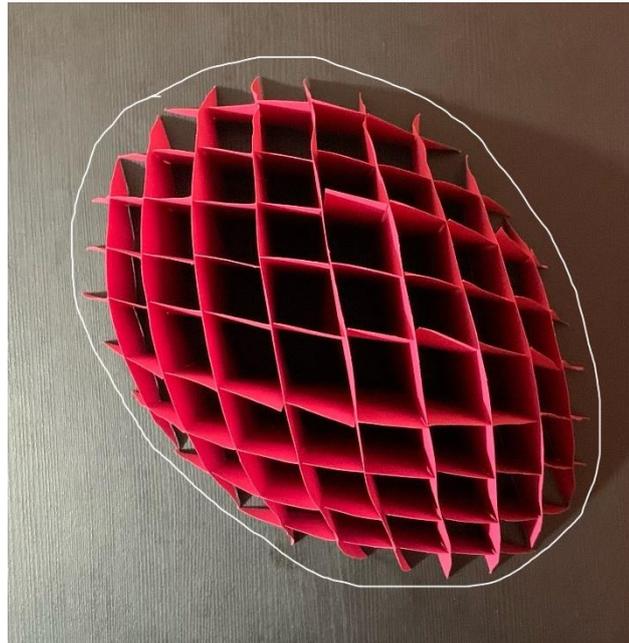
**Figura 43** – Planos de grade dos modelos construídos



Fonte: Autor, 2024.

Ao achatar um pouco o parabolóide de revolução é possível visualizar uma grade elíptica, como indicado na Figura 44. Assim, o modelo serve para estudar tanto o parabolóide de revolução quanto o parabolóide elíptico.

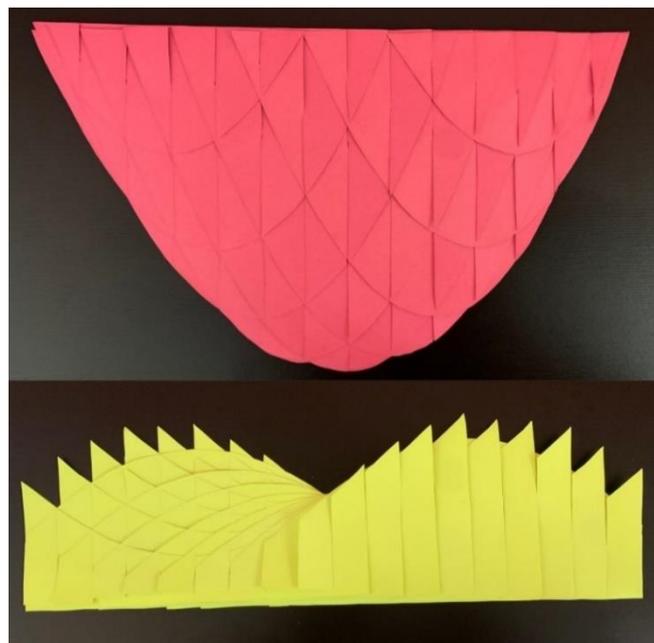
**Figura 44** – Grade elíptica



Fonte: Autor, 2024.

Os modelos também podem ser planificados, como mostra a Figura 45. Observe que a planificação do modelo do parabolóide de revolução pode ser utilizada como molde para desenhar uma parábola.

**Figura 45** – Planificação dos modelos



Fonte: Autor, 2024.

A modelagem via *Sliceform* permitiu uma exploração tridimensional dos paraboloides, possibilitando uma compreensão mais intuitiva de sua estrutura e propriedades. A partir dos modelos físicos foi possível interagir diretamente com as superfícies, manipulando-as e visualizando-as de forma mais concreta. Neste sentido, a técnica *Sliceform* apresenta um potencial de uso como recurso didático para as aulas de Geometria. Várias são as metodologias voltadas para o ensino de Matemática que consideram o uso de tecnologias, jogos, projetos, resolução de problemas e materiais manipuláveis.

Segundo Monera (2020), o uso de materiais manipuláveis visa auxiliar a dificuldade que alguns alunos encontram na Matemática devido à sua abstração. Contudo, é crucial escolher materiais que correspondam ao nível dos alunos e ao conteúdo abordado, assim como determinar o momento apropriado para utilizá-los. Para Cascallana (1988), os materiais manipuláveis podem ser classificados em estruturados e não estruturados. Os materiais estruturados são aqueles pensados especificamente para o ensino de Matemática, enquanto que os não estruturados são aqueles que o estudante encontra no dia a dia e que podem contribuir para a aprendizagem de Matemática.

Monera (2020) salienta que a ideia de construir modelos reais de superfícies matemáticas se deu devido a dificuldade dos alunos em imaginar as superfícies e curvas que estavam sendo explicadas em aula. Esses modelos ajudavam os estudantes a visualizarem melhor os objetos estudados. Com isso, a criação de modelos tridimensionais a partir de cortes bidimensionais possibilita que os estudantes construam modelos concretos e tangíveis de superfícies ou dos sólidos geométricos estudados na Geometria Espacial.

A construção dos paraboloides via *Sliceform* levou a uma compreensão mais aprofundada da espacialidade e das seções transversais das superfícies. A manipulação dos modelos pelo autor deste trabalho foi uma atividade envolvente e motivadora, que estimulou a criatividade do autor e um interesse ainda maior pelas superfícies matemáticas.

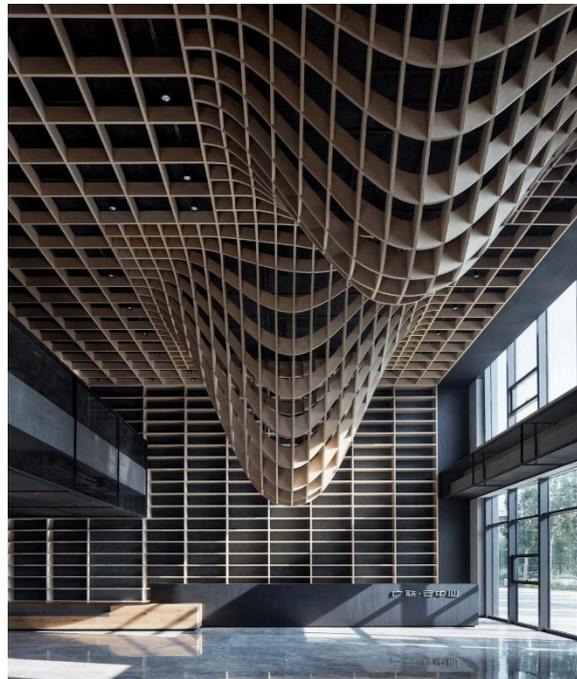
A modelagem de objetos geométricos tridimensionais possibilita, segundo Monera (2020), apresentar aos alunos algumas superfícies que podem não fazer parte do currículo, mas que são de um nível adequado para o seu entendimento e mostrar aos alunos que as curvas planas estudadas podem existir no espaço, sendo parte de superfícies, ou que podem se mover no espaço, criando superfícies específicas, como as de revolução.

Na sala de aula, os modelos poderiam ser utilizados para demonstrar visualmente conceitos geométricos e envolver os alunos de forma ativa na própria aprendizagem, no qual os alunos não apenas observam, mas também manipulam e exploram os objetos de estudo. Além disso, a técnica mescla a Matemática e a Arte, o que possibilita uma integração entre as

disciplinas. Neste caso, os estudantes poderiam, por exemplo, estudar a Geometria dos sólidos espaciais e ao mesmo tempo explorar a estética e o design através da construção de modelos via *Sliceform*.

A técnica *Sliceform* não se limita somente a construção e modelagem de objetos em pequena escala. Monera (2020) aponta que o estudo de seções transversais, elemento base do *Sliceform*, também é interessante na Arquitetura, podendo ajudar a construir edifícios. É o caso das construções como o *Guanglian icc cloud center* em Xiangyang, na China, o *Metropol Parasol* em Sevilla, na Espanha, e a escultura da *Tonbridge School*, no Reino Unido, como mostram as Figuras 46, 47 e 48, respectivamente.

**Figura 46** – *Guanglian icc cloud center*



Fonte: Archello<sup>5</sup>, 2024.

---

<sup>5</sup> Disponível em: <<https://archello.com/project/guanglian-icc-cloud-center>>. Acesso em: 01 de ago. de 2024.

**Figura 47 - Metropol Parasol**



Fonte: Alda, 2011.

**Figura 48 – Escultura da Tonbridge School**



Fonte: Harnasz, 2011.

Diante disso, a técnica *Sliceform* se mostra altamente versátil, possibilitando a construção de pequenos modelos de superfícies matemáticas para estudo individual ou em sala de aula até grandes estruturas para exposições públicas. Assim, o *Sliceform* não só pode ser

explorado nas aulas de Matemática como também por arquitetos que queiram criar protótipos de suas ideias, experimentando com formas e estruturas antes de construir modelos em escalas maiores, além de maquetes para apresentações de projetos, proporcionando uma visualização tangível e interativa das propostas arquitetônicas.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho está situado em uma interface entre a Matemática e a Arquitetura. Este teve como objetivo estudar o parabolóide elíptico e o parabolóide hiperbólico e suas modelagens via técnica *Sliceform* no contexto da relação entre Matemática e Arquitetura. Ao longo deste estudo, discutiu-se inicialmente a conexão entre essas duas ciências, demonstrando como a Matemática serve de fundamento para a Arquitetura e a Arquitetura para a Matemática. O parabolóide elíptico e o parabolóide hiperbólico foram detalhadamente analisados, destacando suas equações, seções transversais e a aplicabilidade em construções arquitetônicas. Exemplos de construções que incorporam essas formas foram apresentados, ilustrando a beleza e a funcionalidade que os parabolóides podem trazer às estruturas construídas.

O estudo prosseguiu com uma discussão da técnica *Sliceform*, uma abordagem para a construção de modelos tridimensionais que se baseia na interseção de uma superfície com planos. Explicou-se o funcionamento dessa técnica, apontando sua possibilidade em representar objetos geométricos. Em seguida, aplicou-se a técnica *Sliceform* na construção de modelos físicos de parabolóides, comparando-os com as representações gráficas geradas no *software GeoGebra*. Essa comparação evidenciou as semelhanças entre os modelos físicos e os gráficos, o que mostrou a precisão da técnica *Sliceform* na modelagem de superfícies matemáticas. No âmbito arquitetônico, alguns exemplos de construções mostraram que a técnica *Sliceform* não é apenas uma ferramenta valiosa para a visualização e estudo de superfícies matemáticas em pequenas escalas, mas também para a construção de elementos estruturais inovadores, oferecendo novas possibilidades para o *design* de estruturas com formas complexas e esteticamente harmônicas.

Neste sentido, o objetivo principal do trabalho foi atingido, evidenciando a possibilidade e a utilidade da técnica *Sliceform* na modelagem de parabolóides e destacando a relevância dessa abordagem tanto para a Matemática quanto para a Arquitetura. Além disso, este estudo propõe-se a ser um ponto de partida para futuras pesquisas, considerando a escassez de estudos em português sobre o uso do *Sliceform* na modelagem de superfícies matemáticas. A técnica possui um grande potencial pedagógico, facilitando a compreensão de conceitos geométricos por meio da manipulação direta de modelos físicos. Estudos com aplicações práticas que investiguem o *Sliceform* em sala de aula poderiam proporcionar resultados mais concretos sobre sua eficácia como ferramenta educativa, potencialmente melhorando o ensino e a aprendizagem de Geometria.

Uma atividade com o uso do *Sliceform* no Ensino Básico pode envolver o conteúdo de Geometria Espacial, com foco nos principais sólidos geométricos e suas propriedades. Os alunos podem ser, inicialmente, introduzidos ao conceito de interseção de planos e às características dos sólidos geométricos. Posteriormente, os alunos recebem os *templates* das fatias dos sólidos (esfera, cubo, cone etc.) que serão construídos via *Sliceform*, no qual eles devem encaixar as peças cortadas em papel cartão ou cartolina, de acordo com as marcações, construindo assim um modelo tridimensional do sólido estudado. Durante a atividade, os alunos poderão visualizar como diferentes planos interceptam os sólidos geométrico e explorar conceitos como volume, área de superfície e simetria. Além disso, o(a) professor(a) também pode explorar a interdisciplinaridade entre Matemática e Arte, destacando a potencialidade do *Sliceform* na Arquitetura e discutindo os elementos artísticos presentes nos modelos construídos.

Em síntese, a investigação conduzida reforça a importância em explorar e discutir a relação entre Matemática e Arquitetura, demonstrando como a Matemática pode inspirar e informar o *design* arquitetônico, e como técnicas inovadoras, como o *Sliceform*, podem abrir novas fronteiras na modelagem e construção de superfícies complexas. Espera-se que este trabalho inspire outros pesquisadores a explorar ainda mais essas conexões e a contribuir para o avanço do conhecimento neste campo interdisciplinar.

## REFERÊNCIAS

ALDA, F. **Metropol Parasol, Seville**. 2011. Disponível em: <<https://arquitecturaviva.com/works/metropol-parasol-7>>. Acesso em: 01 de ago. de 2024.

ARCHELLO. 2024. Disponível em: <<https://archello.com/project/guanglian-icc-cloud-center>>. Acesso em: 01 de ago. de 2024.

ARCHELLO. **Guanglian icc cloud center**. 2024. Disponível em: <<https://archello.com/project/guanglian-icc-cloud-center>>. Acesso em: 01 de ago. de 2024.

BARDOS, L. C. **How to make a model of a hyperbolic paraboloid out of paper**. 2024. Disponível em: <<https://www.cutoutfoldup.com/972-hyperbolic-paraboloid-from-parabolic-cross-sections.php>>. Acesso em: 04 de jun. de 2024.

BATISTA, C. et al. **A Matemática na Arquitetura**. Abordando a Matemática, 2015. Disponível em: <https://abordandoamatematica.wordpress.com/2015/09/14/173/>. Acesso em: 03 de maio de 2024.

BAUMKART, T. A.; ATKINSON, L. G. D. M.; NEIS, K. **A influência da matemática na história da arquitetura e sua relação com a atualidade**. Salão do Conhecimento, [S. l.], v. 5, n. 5, 2019. Disponível em: <<https://publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/salaconhecimento/article/view/11951>>. Acesso em: 29 de abr. de 2024.

BRUSANTIN, A. V. **História da Matemática Relacionada à Arquitetura**. SCRIBD, [S. l.], p. 1-16, 9 de mar. 2011. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/doc/54974950/Historia-da-Matematica-Relacionada-a-Arquitetura>>. Acesso em: 29 de abr. de 2024.

CAMARGO, I; BOULOS, P. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2005.

CASCALLANA, M. T. **Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos.** Madrid: Santillana, 1988.

CUNDY, H. M.; ROLLETT, A. P. **Mathematical Models.** 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1961.

DUQUE, K. **Clássicos da Arquitetura: Restaurante Los Manantiales / Félix Candela, 2017.** Disponível em: < <https://www.archdaily.com.br/br/869307/classicos-da-arquitetura-restaurant-los-manantiales-felix-candela>>. Acesso em: 08 mai. 2022.

FERNANDES, M. **Concurso Senado: Orçamento 2022 prevê vagas para a Casa.** Disponível em: <<https://blogs.correiobraziliense.com.br/papodeconcurseiro/concurso-senado-orcamento-2022-preve-vagas-para-a-casa/>>. Acesso em: 15 de maio de 2024.

GIANNOTTI, A. **Clássicos da Arquitetura: Catedral de Santa Maria / Kenzo Tange, 2011.** Disponível em: <<https://www.archdaily.com/114435/ad-classics-st-mary-cathedral-kenzo-tange>>. Acesso em: 08 de maio de 2022.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; SANTO, N. E. **Geometria Analítica II.** 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

GONÇALVES, V. S. **Curvas, Superfícies e Arquitetura.** 2017. Disponível em: <<https://curvasearquitetura.wordpress.com/paraboloide-hiperbolico/>>. Acesso em: 08 mai. 2022.

GRIZOTTO, C.; ANDRADE, L.; **L'Oceanografic: conheça o aquário gigante em Valência, 2020.** Disponível em: <<https://turismo.eurodicas.com.br/l-oceanografic/>>. Acesso em: 08 de mai. de 2022.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo volume 2.** 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.

HARNASZ, C. **Sliceform at Tonbridge School**. 2011. Disponível em: <<https://www.flickr.com/photos/7265584@N04/6239870497/in/photostream/>>. Acesso em: 01 de ago. de 2024.

HARTMANN, A. L. B.; MALTEMPI, M. V. **Matemática, arte e história: um foco nos dez livros de arquitetura de Vitruvius**. Revista História da Matemática para Professores, v. 8, n. 2, p. 1-9, 2022.

KILHIAN, K. **Matemática, Engenharia e Arte: Texto paradidático de Cálculo Integral para cursos de engenharia**. 2019. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2019/09/matematica-engenharia-e-arte.html>>. Acesso em: 15 de maio de 2024.

LAURIOLA, D. **Combining efficiency and aesthetics through the integration of structural topology optimization in architecture**. 2017. Disponível em: <<https://repositorio.upct.es/entities/publication/0e473b96-01c9-4594-9a82-653366302755>>. Acesso: 15 de maio de 2024.

LIMA, A. **A regra áurea na arquitetura**. 2018. Disponível em: <<https://projetobatente.com.br/regra-aurea-na-arquitetura/>>. Acesso em: 03 de maio de 2024.

LOPES, M. **A Mitologia e a Verdade da Razão de Ouro**. 2014. Disponível em: <<https://www.astropt.org/2014/08/20/a-mitologia-e-a-verdade-da-razao-de-ouro/>>. Acesso em: 03 de maio de 2024.

LUECKING, S. **Creating Sliceforms with 3D Modelers**. School of Computer Science, Telecommunications and Information Systems, DePaul University, Chicago, 2006. Disponível em: <<https://archive.bridgesmathart.org/2006/bridges2006-631.pdf>> Acesso em 20 de out. de 2023.

MARQUES, J. C. **Relações entre proporção, arquitetura e matemática: abordagens em desenho técnico**. GRAPHICA 2017 - XII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design. Araçatuba, 2017.

MARTINS, W. V. **Curvas de nível**: um recurso gráfico utilizando o software geogebra. 2020.

MATOS, D. T.; FERNANDES, T. de S. **As cúpulas do palácio do congresso nacional**. Caderno de Graduação - Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIT - SERGIPE, [S. l.], v. 5, n. 2, p. 91, 2019. Disponível em: <https://periodicos.set.edu.br/cadernoexatas/article/view/6687>. Acesso em: 15 de maio de 2024.

MEIRELLES, C. R. M.; KISHI, S. **Grandes Coberturas na Arquitetura Contemporânea**: Estudos de Caso do Sony Center e do Mercado de Santa Caterina. Cadernos de pós-graduação em arquitetura e urbanismo, v. 13, n. 2, p. 19-19, 2013.

MONERA, M. G. **SliceformsProject**. 2024. Disponível em: <https://www.sliceformsproject.com/>. Acesso em: 04 de jun. 2024.

MONERA, M. G. **Superfícies Seccionadas**. XIII JORNADES D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA: INNOVACIÓ I TECNOLOGIA EN EDUCACIÓ MATEMÀTICA, Alicante, 2018. Disponível em: [https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/98657/1/LLIBRE\\_JORNADES\\_MATEMATIQUES\\_08.pdf](https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/98657/1/LLIBRE_JORNADES_MATEMATIQUES_08.pdf). Acesso em: 25 de ago. de 2023.

MONERA, M. G. **Taller de matemáticas: Superfícies en 3D**. Redes de Investigación e Innovación en Docencia Universitaria, Alicante, 2020. Disponível em: <http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/109964>. Acesso em: 25 de ago. 2023.

SANTANA, J. J. FUNATO, R. L.; **Sliceforms**: uma técnica interessante para construção de gráficos de funções de duas variáveis. In: Anais do GEEM - Vitória da Conquista, Bahia, 2014. Disponível em: <https://proceedings.science/geem/geem-2014/papers/sliceforms--uma-tecnica-interessante-para-construcao-de-graficos-de-funcoes-de-duas-variaveis>. Acesso em: 25 de ago. de 2023.

SANTOS, R. S. dos et al. **Matemática e arquitetura**: uso de fractais em mobiliário urbano. Scientia Plena, v. 14, n. 9, 2018.

SHARP, J. **Sliceforms, surfaces and a serendipitous discovery**. Symmetry: art and science, Bélgica, v. 2, 2002. Disponível em: <https://www.yumpu.com/en/document/view/12301640/symmetryart-and-science-sint-lucas>. Acesso em: 20 de out. de 2023.

SHARP, J. **Sliceforms**: Mathematical Models from Paper. Editora Tarquin Publications, 1995.  
SHARP, J. **Surfaces**: explorations with Sliceforms. Editora Tarquin Publications, 2004.

SILVA, E. G. da. **Os palácios originais de Brasília**. 2012. 597p. Tese (Doutorado em Arquitetura e Urbanismo) – Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de Brasília, 2012.

SILVA, E. M. C. F. **A aplicação da matemática na composição arquitetônica**. 2022.

STEWART, J. **Cálculo volume 2**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

THOMAS, G. B. WEIR, M. D.; HASS J.; GIORDIANO, F. R.; **Cálculo volume 2**. Editora Pearson Education do Brasil, 2012.

VALENCIA TRAVEL. **Oceanogràfic (Valencia) El Acuario marino más grande de Europa**. Disponível em: <<https://infovalenciatravel.com/oceanografic-valencia/>>. Acesso em: 08 de maio de 2024.

VASCONCELOS, E. V. et al. **Sólidos e Superfícies**: Construção de modelos concretos. Salvador: EDUFBA, 2010.

WATSON, T. **Sliceforms**: Deployable Structures from Interlocking Slices. Apollo - University of Cambridge Repository, 2021.